BULANIK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI: SIRALI VE SINIRLANDIRILMIŞ BULANIK VERİLER İÇİN

Prof. Dr. İbrahim GÜNGÖR
Akdeniz Üniversitesi Alanya İşletme Fakültesi
Dr. Kenan Oğuzhan ORUÇ
Süleyman Demirel Üniversitesi, Strateji Geliştirme Daire Başkanlığı

ÖZET

Bulanık girdi–çıktı verilerine sahip işletmelerin etkinlik ölçümlerinin yapılabilmesi için Bulanık Veri Zarflama Analizi (BVZA) modelleri geliştirilmiştir.

Bu çalışmada; sıralı ve sınırlandırılmış bulanık girdi-çıktı verilerine sahip işletmelerin göreli etkinliğinin ölçülmesinde kullanılan modellerden 3 tanesi incelerek örneklerle karşılaştırmalı analizi yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler: *Sıralı Veri, Sınırlandırılmış Veri, Bulanık Veri Zarflama Analizi.*

COMPARISON OF FUZZY DATA ENVELOPMENT ANALYSIS MODELS: FOR ORDİNAL AND INTERVAL DATA

ABSTRACT

Fuzzy data envelopment models were developed to measure efficiency of the enterprises having fuzzy input-output data.
In this study; 3 of the models, which are used to measure the relative efficiency of the enterprises having interval fuzzy input-output data, examined and compared with examples.

Keywords: *Ordinal Data, Interval Data, Fuzzy Data Envelopment Analysis.*

1. GİRİŞ

Veri Zarflama Analizi (VZA); benzer işler yapan, çoklu girdi/çıktıya sahip organizasyonel birimlerin göreli etkinliklerini ölçmede kullanılan matematiksel programlama tabanlı bir tekniktir. Özellikle, birden fazla girdi ya da çıktının, ağırlıklı bir girdi ya da çıktı setine dönüştürülemediği durumlarda VZA etkin bir yaklaşım olarak kullanılmaktadır (Ulucan, 2002: 187)

VZA veri tabanlı bir etkinlik ölçme yöntemi olduğu için verilerin doğru olması, kesin değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Ancak gerçek hayat uygulamalarında etkinlik değerini hesaplamak için kullanılması gereken girdi-çıktı verileri tam ve doğru olarak elde edilememekte, belirsizlik içermektedir. Böyle durumlarda etkinlik ölçümlerinin yapılabilmesi için BVZA modelleri geliştirilmiştir.

Bulanık VZA [Girdiye yönelik CCR (Charnes, Cooper ve Rhodes)] modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Kao ve Liu, 2000: 431):

$$E_o = \max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{X}_{io}}$$

Kısıtlar,

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{X}_{io}} \leqslant 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{Y}_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{X}_{ij}} \leqslant 1 \qquad j=1,2,.....n \qquad j\neq o$$

$$v_i,\ u_r \geq \varepsilon \qquad r=1,2,.....s \qquad i=1,2,.....m$$

Burada,

n	: KVB sayısı	j=1,2,.....n
s	: Çıktı sayısı	r=1,2,.....s
m	: Girdi sayısı	i=1,2,.....m
u_r	: o. KVB tarafından r. çıktıya verilen ağırlık değeri	
v_i	: o. KVB tarafından i. girdiye verilen ağırlık değeri	
x_{io}	: o. KVB'nin kullandığı i. bulanık girdi miktarı	
y_{ro}	: o. KVB'nin elde ettiği r. bulanık çıktı miktarı	
x_{ij}	: j. KVB'nin kullandığı i. bulanık girdi miktarı	
y_{rj}	: j. KVB'nin elde ettiği r. bulanık çıktı miktarı	

BVZA modellerinde veriler:

1.Sınırlandırılmış veriler (Alt ve üst sınır değerlerinin ya da üyelik fonksiyonunun bilindiği bulanık sayı verileri)

1. GİRİŞ

Veri Zarflama Analizi (VZA); benzer işler yapan, çoklu girdi/çıktıya sahip organizasyonel birimlerin göreli etkinliklerini ölçmede kullanılan matematiksel programlama tabanlı bir tekniktir. Özellikle, birden fazla girdi ya da çıktının, ağırlıklı bir girdi ya da çıktı setine dönüştürülemediği durumlarda VZA etkin bir yaklaşım olarak kullanılmaktadır (Ulucan, 2002: 187)

VZA veri tabanlı bir etkinlik ölçme yöntemi olduğu için verilerin doğru olması, kesin değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Ancak gerçek hayat uygulamalarında etkinlik değerini hesaplamak için kullanılması gereken girdi-çıktı verileri tam ve doğru olarak elde edilememekte, belirsizlik içermektedir. Böyle durumlarda etkinlik ölçümlerinin yapılabilmesi için BVZA modelleri geliştirilmiştir.

Bulanık VZA [Girdiye yönelik CCR (Charnes, Cooper ve Rhodes)] modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Kao ve Liu, 2000: 431):

$$E_o = \max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{X}_{io}}$$

Kısıtlar,

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{X}_{io}} \leqslant 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{Y}_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{X}_{ij}} \leqslant 1 \qquad j=1,2,.....n \qquad j \neq o$$

$$v_i,\ u_r \geq \varepsilon \qquad r=1,2,.....s \qquad i=1,2,.....m$$

Burada,

n	: KVB sayısı	j=1,2,.....n
s	: Çıktı sayısı	r=1,2,.....s
m	: Girdi sayısı	i=1,2,.....m
u_r	: o. KVB tarafından r. çıktıya verilen ağırlık değeri	
v_i	: o. KVB tarafından i. girdiye verilen ağırlık değeri	
x_{io}	: o. KVB'nin kullandığı i. bulanık girdi miktarı	
y_{ro}	: o. KVB'nin elde ettiği r. bulanık çıktı miktarı	
x_{ij}	: j. KVB'nin kullandığı i. bulanık girdi miktarı	
y_{rj}	: j. KVB'nin elde ettiği r. bulanık çıktı miktarı	

BVZA modellerinde veriler:

1.Sınırlandırılmış veriler (Alt ve üst sınır değerlerinin ya da üyelik fonksiyonunun bilindiği bulanık sayı verileri)

2. Sıralı veriler (KVB'lerin; herhangi i. girdi ya da r. çıktı verileri arasındaki büyük-küçük-eşit ya da çok önemli-önemli-önemsiz gibi sözel sıralı ilişkinin bilindiği veriler)
3. Hiçbir şekilde elde edilememiş veriler
4. Kesin değerleri bilinen veriler
olmak üzere 4 sınıfa ayrılmıştır.
Kullanılan veri türüne göre BVZA modelleri:
1. Sıralı ve kesin değeri bilinen veri modelleri
2. Sıralı, sınırlandırılmış ve kesin değeri bilinen veri modelleri
3. Sınırlandırılmış ve kesin değeri bilinen veri modelleri
olmak üzere 3 başlık altında sınıflandırılabilir.

Sınırlandırılmış ve kesin değeri bilinen veriler için; sınırlandırılmış verilerin üyelik fonksiyonu türü, elde edilen etkinlik değerinin alt ve üst sınır olması, eşitsizliklerin de bulanık olması/olmaması vb. ayrımlara göre Kao ve Liu (2000), Lertworasirikul (2001), Saati vd. (2002), Lertworasirikul vd. (2003), Guo ve Tanaka (2003), Saati ve Memariani (2005) ile Leon vd. (2003) tarafından önerilmiş 7 farklı model vardır.

Bu çalışmada; sıralı bulanık veriler için önerilmiş olan Cook, Kress ve Seiford modeli (1996) ile sıralı ve sınırlandırılmış bulanık veriler için önerilmiş olan Despotis-Smirlis (2002) ve Cooper-Park-Yu (1999) modelleri incelenerek örneklerle karşılaştırılmıştır.

2. BVZA MODELLERİ

2.1. Cook-Kress-Seiford Modeli

İlk olarak Cook, Kress ve Seiford (1993) sadece sıralı veriler içeren girdi ve çıktı verileri için model önermiş, daha sonra bu modeli 1996 yılındaki çalışmaları ile kesin ve sıralı veriler içeren problemler için geliştirmişlerdir. Cook, Kress ve Seiford kesin ve sıralı veriler içeren KVB'ler için o. KVB'nin girdiye yönelik CCR modelini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

$$E_o = \max \sum_{r \in K^Ç} u_r y_{ro} + \sum_{r \in S^Ç} \sum_{\ell=1}^{L} u_{ro}^{\ell} y_{ro}^{\ell}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i \in K^G} v_i x_{io} + \sum_{i \in S^G} \sum_{\ell=1}^{L} v_{io}^{\ell} x_{io}^{\ell} = 1$$

$$\sum_{r \in K^Ç} u_r y_{rj} + \sum_{r \in S^Ç} \sum_{\ell=1}^{L} u_{rj}^{\ell} y_{rj}^{\ell} - \sum_{i \in K^G} v_i x_{ij} - \sum_{i \in S^G} \sum_{\ell=1}^{L} v_{ij}^{\ell} x_{ij}^{\ell} \leq 0 \qquad j=1,2,.....n$$

En alt sıradaki veri $\geq \delta$ olmak üzere her sıralı r. çıktı için y_{rj}'ler arasındaki sıralı ilişki $\quad r \in S^Ç \quad j=1,2,.....n$

En alt sıradaki veri $\geq \delta$ olmak üzere her sıralı i. girdi için x_{ij}'ler arasındaki sıralı ilişki $\quad i \in S^G \quad j=1,2,.....n$

$$u_{rj}^{\ell} = \begin{cases} 1 & \text{j.KVB'nin r.çiktisi r.çiktilar arasinda } \ell\text{.siradaise} \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$$v_{ij}^{\ell} = \begin{cases} 1 & \text{j. KVB'nin i. girdisi i. girdiler arasında } \ell \text{. sırada ise} \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$L \leqslant n$

$v_i,\ u_r \geq \varepsilon \qquad r=1,2,.....s \qquad i=1,2,.....m$

Burada,

$K^{Ç}$: Kesin verilerin çıktı kümesi
K^{G} : Kesin verilerin girdi kümesi
$S^{Ç}$: Sıralı verilerin çıktı kümesi
S^{G} : Sıralı verilerin girdi kümesi
Ç : Çıktıların indisler kümesi, Ç={1,2,...,s}
G : Girdilerin indisler kümesi, G=={1,2,...,m}
L : Sıralı veriler arasındaki ilişkinin sırasal numara olarak ifade edildiği küme
ℓ : Sıralı veriye verilen sıra
u_{rj}^{ℓ} : j. KVB'nin r. sıralı çıktısına verilen ağırlık
v_{ij}^{ℓ} : j. KVB'nin i. sıralı girdisine verilen ağırlık
δ : Yeterince küçük bir sayı ($\delta \leq 10^{-6}$)

(ℓ) ile (L) arasındaki ilişki basit bir örnekle şöyle açıklanabilir. Örneğin, sıralı ilişkisi bilinen girdi ya da çıktı verileri için, çok çok önemli-çok önemli-önemli-önemsiz sınıflandırılması verilmiş olsun. Ayrıca $\ell = 1$ değeri çok çok önemli, $\ell = 2$ değeri çok önemli, $\ell = 3$ değeri önemli ve $\ell = 4$ değeri önemsiz ifadelerine verilsin. O zaman L kümesi, L={1,2,3,4} olur. Birden fazla KVB'nin aynı ℓ değerini alma olasılığı olduğu için modele kısıt olarak L≤n yazılmıştır.

2.2. Despotis-Smirlis Modeli

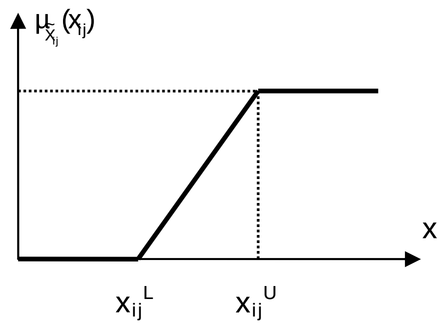
a)Sınırlandırılmış ve Kesin Veriler İçin Despotis-Smirlis Modeli:

Sınırlandırılmış veriler içeren KVB'ler için üyelik fonksiyonu girdiler ve çıktılar için monotonik artan (her ne kadar çalışmada belirtilmese de) olarak grafik 1'deki gibi tanımlanmıştır. Grafik 1'den herhangi bir $x_{ij} \in \tilde{X}_{ij}$ ve $y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj}$ için;

$$x_{ij} = x_{ij}^{L} - \left(x_{ij}^{L} - x_{ij}^{U}\right) \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})$$

$$y_{rj} = y_{rj}^{L} - \left(y_{rj}^{L} - y_{rj}^{U}\right) \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj})$$

tanımlaması yapılabilir.



Grafik 1.Despotis-Smirlis Modelinde Girdiler ve Çıktılar İçin Üyelik Fonksiyonu

Üyelik derecesi ve sınır değerleri biçiminde o. KVB için girdiye yönelik CCR modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E_o = \max \sum_{r=1}^{s} u_r \left\{ \left(y_{ro}^L - y_{ro}^U\right) \mu_{\tilde{Y}_{ro}}(y_{ro}) + y_{ro}^U \right\}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \left\{ x_{io}^L - \left(x_{io}^L - x_{io}^U\right) \mu_{\tilde{X}_{io}}(x_{io}) \right\} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \left\langle \left(y_{rj}^L - y_{rj}^U\right) \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) + y_{rj}^U \right\rangle - \sum_{i=1}^{m} v_i \left\langle x_{ij}^L - \left(x_{ij}^L - x_{ij}^U\right) \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \right\rangle \leq 0 \qquad j=1,2,.....n$$

$$v_i,\ u_r \geq \varepsilon \qquad r=1,2,.....s \quad i=1,2,.....m$$

$$0 \leq \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}),\ \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \leq 1 \qquad r=1,2,.....s \quad i=1,2,.....m \quad j=1,2,.....n$$

Hem girdi ve çıktı miktarları hem de girdi ve çıktılara verilecek ağırlıklar bilinmediği için ($u_r\tilde{Y}_{rj}$ ve $v_i\tilde{X}_{ij}$ bilinmeyenlerin çarpımı olacağı için) doğrusal olmayan VZA modeli $p_{rj} = u_r\mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj})$ ve $q_{ij} = v_i\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})$ tanımlamaları ile doğrusal VZA modeline aşağıdaki gibi çevrilebilir:

$$E_o = \max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L + p_{ro}\left(y_{ro}^U - y_{ro}^L\right)$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L + q_{io}\left(x_{io}^U - x_{io}^L\right) = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L + p_{rj}\left(y_{rj}^U - y_{rj}^L\right) - \left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L + q_{ij}\left(x_{ij}^U - x_{ij}^L\right) \right\rangle \leq 0 \qquad j=1,2,.....n$$

$$p_{rj} - u_r \leq 0 \qquad q_{ij} - v_i \leq 0 \qquad i=1,2,.....m \qquad r=1,2,.....s \qquad j=1,2,.....n$$

$v_i,\ u_r \geq \varepsilon$ $\quad p_{rj},\ q_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,.....m \quad r=1,2,.....s \quad j=1,2,.....n$

Model; her zaman için [$p_{ro} = u_r \quad q_{io} = \varepsilon$] ve [$p_{rj} = \varepsilon$ ve $q_{ij} = v_i$ $(j \neq o)$] değerlerine ulaşılmasına izin vermektedir. Bu değerler, o. KVB için sınırlandırılmış verilerden kendi çıktı değeri için üst-girdi değeri için alt, diğer KVB'lerin çıktı değerleri için alt-girdi değerleri için üst sınırdaki veriyi seçmesi demektir. Yani, önerilen modelden elde edilen etkinlik değeri, o. KVB'nin alabileceği en yüksek etkinlik değeridir.

b)Sınırlandırılmış, Kesin ve Sıralı Veriler İçin Despotis-Smirlis Modeli:

Sınırlandırılmış (monotonik artan üyelik fonksiyonu olması şartı ile), kesin ve sıralı veriler için girdiye yönelik CCR modeli aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$E_o = \max \sum_{r \in SK^{Ç}} u_r y_{ro}^L + p_{ro}\left(y_{ro}^U - y_{ro}^L\right) + \sum_{r \in S^{Ç}} u_r y_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i \in SK^G} v_i x_{io}^L + q_{io}\left(x_{io}^U - x_{io}^L\right) + \sum_{i \in S^G} v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{r \in SK^{Ç}} u_r y_{rj}^L + p_{rj}\left(y_{rj}^U - y_{rj}^L\right) + \sum_{r \in S^{Ç}} u_r y_{rj} - \sum_{i \in SK^G} v_i x_{ij}^L + q_{ij}\left(x_{ij}^U - x_{ij}^L\right) - \sum_{i \in S^G} v_i x_{ij} \leq 0$$

$j=1,2,.....n$

$p_{rj}-u_r \leq 0 \qquad r \in SK^{Ç} \qquad j=1,2,.....n$

$q_{ij}-v_i \leq 0 \qquad i \in SK^G \qquad j=1,2,.....n$

$v_i,\ u_r \geq \varepsilon \qquad r \in SK^{Ç} \qquad i \in SK^G$

$u_r y_{rj}$'ler arasındaki sıralı ilişki; ardışık gelen 2 sıralı çıktı ve o çıktıya verilecek ağırlığın çarpımı $(u_r y_{rj})$ arasındaki fark $\geq \delta$, $\quad r \in S^{Ç}$ $\quad j=1,2,..n$

$v_i x_{ij}$'ler arasındaki sıralı ilişki; ardışık gelen 2 sıralı girdi ve o girdiye verilecek ağırlığın çarpımı $(v_i x_{ij})$ arasındaki fark $\geq \delta, i \in S^G \quad j=1,2,..n$

Burada,

$SK^{Ç}$: Sınırlandırılmış ve kesin verilerin çıktı kümesi
SK^G : Sınırlandırılmış ve kesin verilerin girdi kümesi
$S^{Ç}$: Sıralı verilerin çıktı kümesi
S^G : Sıralı verilerin girdi kümesi
Ç : Çıktıların indisler kümesi, Ç={1,2,...,s}
G : Girdilerin indisler kümesi, G=={1,2,...,m}
δ : Yeterince küçük bir sayı ($\delta \leq 10^{-6}$)

Sıralı veriler modele, ardışık sıralı 2 veri ve o veriye verilecek ağırlıkların çarpımı arasındaki fark ($\geq \delta$) kısıtları ile yansıtılmıştır. Eğer ardışık 2 veri birbirine eşitse ($\geq \delta$) yerine (=0) yazılır. Doğrusal olmayan VZA modeli $t_{rj} = u_r y_{rj}$ ($r \in S^{Ç}$) ve $k_{ij} = v_i x_{ij}$ ($i \in S^G$) tanımlamaları ile doğrusal hale getirilerek o. KVB için girdiye yönelik CCR modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E_o = \max \sum_{r\in SK^{Ç}} u_r y^L_{ro} + p_{ro}\left(y^U_{ro} - y^L_{ro}\right) + \sum_{r\in S^{Ç}} t_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i\in SK^G} v_i x^L_{io} + q_{io}\left(x^U_{io} - x^L_{io}\right) + \sum_{i\in S^G} k_{io} = 1$$

$$\sum_{r\in SK^{Ç}} u_r y^L_{rj} + p_{rj}\left(y^U_{rj} - y^L_{rj}\right) + \sum_{r\in S^{Ç}} t_{rj} - \sum_{i\in SK^G} v_i x^L_{ij} + q_{ij}\left(x^U_{ij} - x^L_{ij}\right) - \sum_{i\in S^G} k_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,.....n$$

$p_{rj}-u_r \leq 0$ $\quad r \in SK^{Ç}$ $\quad j=1,2,.....n$

$q_{ij}-v_i \leq 0$ $\quad i \in SK^G$ $\quad j=1,2,.....n$

$v_i,\ u_r \geq \varepsilon$ $\quad r \in SK^{Ç}$ $\quad i \in SK^G$

ardışık gelen 2 sıralı t_{rj} arasındaki fark $\geq \delta$

ardışık gelen 2 sıralı k_{ij} arasındaki fark $\geq \delta$

2.3. Cooper-Park-Yu Modeli

Sınırlandırılmış, kesin ve sıralı veriler için uygulanabilen 2 aşamalı bir modeldir. Örneğin 4 adet KVB için çizelge 1'deki gibi sıralı, sınırlandırılmış ve kesin değerleri bilinen verilerden oluşan bir veri seti bulunduğunda modelin kurulumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 1. Kesin, Sınırlandırılmış ve Sıralı Veriler İçin Örnek Veri Çizelgesi

KVB	ÇIKTILAR (y_{rj})			GİRDİLER (x_{ij})		
	Kesin Değeri Bilinen (y_{1j})	Sıralı (y_{2j})	Sınırlandırılmış (y_{3j})	Kesin Değeri Bilinen (x_{1j})	Sıralı (x_{2j})	Sınırlandırılmış (x_{3j})
1	y_{11}	$y_{23}>y_{21}$	$[y_{31}^L,\ y_{31}^U]$	x_{11}	x_{21}	$[x_{31}^L,\ x_{31}^U]$
2	y_{12}	$y_{21}>y_{22}$	$[y_{32}^L,\ y_{32}^U]$	x_{12}	$x_{23}>x_{22}$	$[x_{32}^L,\ x_{32}^U]$
3	y_{13}	y_{23}	$[y_{33}^L,\ y_{s33}^U]$	x_{13}	$x_{21}>x_{23}$	$[x_{33}^L,\ x_{33}^U]$
4	y_{14}	$y_{22}>y_{24}$	$[y_{34}^L,y_{34}^U]$	x_{14}	$x_{22}>x_{24}$	$[x_{34}^L,x_{34}^U]$

1. Aşama:

Modelin ilk aşamasında her veri, ilgili sütundaki maksimum değerli veriye bölünerek ölçek dönüşümü yapılır.

Çizelge 1'de;

y_{1j} sütunu için y_{11}'in $\quad$ y_{2j} sütunu için y_{23}'ün

y_{3j} sütunu için y_{33}'ün $\quad$ x_{1j} sütunu için x_{13}'ün

x_{2j} sütunu için x_{21}'in $\quad$ x_{3j} sütunu için x_{34}'ün,

maksimum değerli veriler olduğunu ve hesaplama kolaylığı için maksimum değerlerin 1 olduğunu varsayalım. Ölçek dönüşümü yapmanın amacı her sütundaki birim veri değerlerini (bu değer her zaman 1 olur) elde etmektir.

Tüm çıktılar için $\hat{y}_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{\max_j(y_{rj})}$ [ölçek dönüşümü yapılmış j. KVB'nin r. çıktısı ($\hat{y}_{rj}$)=j. KVB'nin r. çıktısının (y_{rj}), tüm KVB'lerin r. çıktıları içerisindeki en yüksek değerli elemana ($\max_j(y_{rj})$) oranı] ve tüm girdiler için $\hat{x}_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{\max_j(x_{ij})}$ [ölçek dönüşümü yapılmış j. KVB'nin i. girdisi ($\hat{x}_{ij}$)=j. KVB'nin i. girdisinin (x_{ij}), tüm KVB'lerin i. girdileri içerisindeki en yüksek değerli elemana ($\max_j(x_{ij})$) oranı] formülleri ile ölçek dönüşümü yapılmış olan veriler çizelge 2'deki gibi olur.

Çizelge2. Ölçek Dönüşümü Yapılan Veriler

KVB	**ÇIKTILAR (y_{rj})**			**GİRDİLER (x_{ij})**		
	Kesin Değeri Bilinen (y_{1j})	Sıralı (y_{2j})	Sınırlandırılmış (y_{3j})	Kesin Değeri Bilinen (x_{1j})	Sıralı (x_{2j})	Sınırlandırılmış (x_{3j})
1	1	$\hat{y}_{23} > \hat{y}_{21}$	[$\hat{y}_{31}{}^{L}$, $\hat{y}_{31}{}^{U}$]	$\hat{x}_{11}$	1	[$\hat{x}_{31}{}^{L}$, $\hat{x}_{31}{}^{U}$]
2	$\hat{y}_{12}$	$\hat{y}_{21} > \hat{y}_{22}$	[$\hat{y}_{32}{}^{L}$, $\hat{y}_{32}{}^{U}$]	$\hat{x}_{12}$	$\hat{x}_{23} > \hat{x}_{22}$	[$\hat{x}_{32}{}^{L}$, $\hat{x}_{32}{}^{U}$]
3	$\hat{y}_{13}$	1	1	1	$\hat{x}_{21} > \hat{x}_{23}$	[$\hat{x}_{33}{}^{L}$, $\hat{x}_{33}{}^{U}$]
4	$\hat{y}_{14}$	$\hat{y}_{22} > \hat{y}_{24}$	[$\hat{y}_{34}{}^{L}$, $\hat{y}_{34}{}^{U}$]	$\hat{x}_{14}$	$\hat{x}_{22} > \hat{x}_{24}$	1

Ölçek dönüşümü yapıldıktan sonra, o. KVB için girdiye yönelik CCR modeli:

$$E_o = \max \sum_{r=1}^{3} u_r \hat{y}_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \hat{x}_{io} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{3} u_r \hat{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{3} v_i \hat{x}_{ij} \leqslant 0 \qquad j=1,2,3,4$$

$$\hat{y}_{23} = 1 > \hat{y}_{21} > \hat{y}_{22} > \hat{y}_{24} \qquad \hat{x}_{21} = 1 > \hat{x}_{23} > \hat{x}_{22} > \hat{x}_{24}$$

$$\hat{y}^L_{31} \le \hat{y}_{31} \le \hat{y}^U_{31}, \qquad \hat{y}^L_{32} \le \hat{y}_{32} \le \hat{y}^U_{32},$$

$$\hat{y}_{33} = 1, \qquad \hat{y}^L_{34} \le \hat{y}_{34} \le \hat{y}^U_{34}$$

$$\hat{x}^L_{31} \le \hat{x}_{31} \le \hat{x}^U_{31}, \qquad \hat{x}^L_{32} \le \hat{x}_{32} \le \hat{x}^U_{32}$$

$$\hat{x}^L_{33} \le \hat{x}_{33} \le \hat{x}^U_{33}, \qquad \hat{x}_{34} = 1$$

v_i, $u_r \ge \varepsilon$ r=1,2,3 i=1,2,3 olur.

2. Aşama:

Hem bazı girdi ve çıktı miktarları hem de girdi ve çıktılara verilecek ağırlıklar bilinmediği için doğrusal olmayan VZA modeli $Y_{rj}= u_r \hat{y}_{rj}$, $X_{ij}= v_i \hat{x}_{ij}$ tanımlaması ile değişken dönüşümü yapılarak doğrusal VZA modeline çevrilir.

1. aşamada ölçek dönüşümü sonucu; $\max_j(\hat{y}_{rj})$ [tüm KVB'lerin ölçek dönüşümü yapılmış r. çıktıları ($\hat{y}_{rj}$) içerisindeki en yüksek değerli elemanı] ve $\max_j(\hat{x}_{ij})$ [tüm KVB'lerin ölçek dönüşümü yapılmış i. girdileri ($\hat{x}_{ij}$) içerisindeki en yüksek değerli elemanı] değerleri 1 olmuştu. Buradan,

$$\max_r(Y_{rj})=u_r \max_j(\hat{y}_{rj}) \quad \rightarrow \quad \max_j(Y_{rj})=u_r$$

$$\max_i(X_{ij})=v_i \max_j(\hat{x}_{ij}) \quad \rightarrow \quad \max_j(X_{ij})=v_i$$

olur ve,

$$\hat{y}_{rj} = Y_{rj}/\max_j(Y_{rj}) \text{ ve } \hat{x}_{ij} = X_{ij}/\max_j(X_{ij}) \text{ yazılabilir.}$$

Ölçek dönüşümü yapılmış veri setinde, her sütundaki maksimum değerli veri bilindiği için, veri seti değişken dönüşümü yapılmış haliyle modele kısıt olarak yazılırsa o. KVB için girdiye yönelik CCR modeli:

$$E_o = \sum_{r=1}^{3} Y_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^{3} X_{io} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{3} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{3} X_{ij} \leq 0 \qquad j=1,2,3,4$$

$$Y_{12}= \hat{y}_{12} Y_{11} \qquad Y_{13}= \hat{y}_{13} Y_{11}$$

$$Y_{14}= \hat{y}_{14} Y_{11}$$

$$X_{11}= \hat{x}_{11} X_{13} \qquad X_{12}= \hat{x}_{12} X_{13}$$

$$X_{14}= \hat{x}_{14} X_{13}$$

$$Y_{23}>Y_{21}>Y_{22}>Y_{24} \qquad X_{21}>X_{23}>X_{22}>X_{24}$$

$$Y_{33}\hat{y}_{31}^{L} \leq Y_{31} \leq Y_{33}\hat{y}_{31}^{U}, \qquad Y_{33}\hat{y}_{32}^{L} \leq Y_{32} \leq Y_{33}\hat{y}_{32}^{U}$$

$$Y_{33}\hat{y}_{34}^{L} \leq Y_{34} \leq Y_{33}\hat{y}_{34}^{U}$$

$$X_{34}\hat{x}_{31}^{L} \leq X_{31} \leq X_{34}\hat{x}_{31}^{U} \qquad X_{34}\hat{x}_{32}^{L} \leq X_{32} \leq X_{34}\hat{x}_{32}^{U}$$

$$X_{34}\hat{x}_{33}^{L} \leq X_{33} \leq X_{34}\hat{x}_{33}^{U}$$

$$Y_{11}, Y_{23}, Y_{33}, X_{13}, X_{21}, X_{34} \geq \varepsilon \qquad \text{olur.}$$

3. MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI**

3.1. Sıralı ve Kesin Veri Modellerinin Karşılaştırılması

Sıralı ve kesin veriler için önerilen Cook-Kress-Seiford, Despotis-Smirlis, ve Cooper-Park-Yu modellerinin karşılaştırılması için örnek 1 kullanılmıştır.
Örnek 1: 2 girdi ve 1 çıktı içeren 4 adet KVB için veriler çizelge 3'teki gibidir.

Çizelge 3. Sıralı ve Kesin Veri Modelleri Örneği için Veri Çizelgesi

KVB	ÇIKTILAR (y_{rj})	GİRDİLER (x_{ij})	
	Kesin Değerleri Bilinen (y_{1j})	Kesin Değerleri Bilinen (x_{1j})	Sıralı (x_{2j})
1	100	1500	$x_{22}>x_{21}$
2	90	1600	$x_{23}>x_{22}$
3	70	2000	x_{23}
4	110	1000	$x_{21}>x_{24}$

3.1.1. Cook-Kress-Seiford Modeli

$$E_1 = \max 100u_1$$

Kısıtlar,

$$1500v_1 + x_{21}^3 = 1$$

$$100u_1 - 1500v_1 - x_{21}^3 \leqslant 0 \qquad 90u_1 - 1600v_1 - x_{22}^2 \leqslant 0$$

$$70u_1 - 2000v_1 - x_{23}^1 \leqslant 0 \qquad 110u_1 - 1000v_1 - x_{24}^4 \leqslant 0$$

$$x_{22}^2 - x_{21}^3 > 0 \qquad x_{23}^1 - x_{22}^2 > 0$$

$$x_{21}^3 - x_{24}^4 > 0 \qquad x_{24}^4 \geqslant 10^{6}$$

$$v_1,\ u_1 \geq 10^{-8}$$

3.1.2. Despotis-Smirlis Modeli

$$E_1 = \max 100u_1$$

Kısıtlar,

$$1500v_1 + k_{21} = 1$$

$$100u_1 - 1500v_1 - k_{21} \leqslant 0$$

$$90u_1 - 1600v_1 - k_{22} \leqslant 0$$

$$70u_1 - 2000v_1 - k_{23} \leqslant 0$$

$$110u_1 - 1000v_1 - k_{24} \leqslant 0$$

$$k_{22} - k_{21} \geqslant 10^{6} \qquad k_{23} - k_{22} \geqslant 10^{6}$$

$$k_{21} - k_{24} \geqslant 10^{6} \qquad v_1,\ u_1 \geq 10^{-8}$$

** Önerilen her model tüm KVB'ler için girdiye yönelik olarak kurulmuş fakat sadece KVB 1 için kurulumlarına yer verilmiştir.

3.1.3. Cooper-Park-Yu Modeli

Her veri ilgili sütundaki maksimum değerli veriye bölünerek ölçek dönüşümü yapılır ve çizelge 4'teki veriler elde edilir.

Çizelge 4. Örnek 1 için Ölçek Dönüşümü Yapılmış Veriler

KVB	ÇIKTILAR (y_{rj})	GİRDİLER (x_{ij})	
	Kesin Değerleri Bilinen (y_{1j})	Kesin Değerleri Bilinen (x_{1j})	Sıralı (x_{2j})
1	0.9091	0.75	$\hat{x}_{22} > \hat{x}_{21}$
2	0.8182	0.8	$\hat{x}_{23} > \hat{x}_{22}$
3	0.6364	1	1
4	1	0,5	$\hat{x}_{21} > \hat{x}_{24}$

Ölçek dönüşümü sonucu aşağıdaki model elde edilir:

$E_1 = \max 0.9091u_1$

Kısıtlar,

$0.75v_1 + \hat{x}_{21}v_2 = 1$

$0.9091u_1 - 0.75v_1 - \hat{x}_{21}v_2 \leq 0$

$0.8182u_1 - 0.8v_1 - \hat{x}_{22}v_2 \leq 0$

$0.6364u_1 - v_1 - v_2 \leq 0$

$u_1 - 0.5v_1 - \hat{x}_{24}v_2 \leq 0$

$1 > \hat{x}_{22}$ $\quad \hat{x}_{22} > \hat{x}_{21}$

$\hat{x}_{21} > \hat{x}_{24}$

$v_1, v_2, u_1 \geq 10^{-8}$

Aşağıdaki tanımlamalar yapılarak değişken dönüşümü yapılır:

$Y_{11}=0.9091u_1$ $\quad Y_{12}=0.8182u_1$ $\quad Y_{13}=0.6364u_1$ $\quad Y_{14}=u_1$

$X_{11}=0.75v_1$ $\quad X_{12}=0.8v_1$ $\quad X_{13}=v_1$

$X_{14}=0.5v_1$

$X_{21}=\hat{x}_{21}v_2$ $\quad X_{22}=\hat{x}_{22}v_2$ $\quad X_{23}=v_2$

$X_{24}=\hat{x}_{24}v_2$

Değişken dönüşümü sonucu model:

$E_1 = \max Y_{11}$

Kısıtlar,

$X_{11} + X_{21} = 1$

$Y_{11} - X_{11} - X_{21} \leq 0$ $\quad Y_{12} - X_{12} - X_{22} \leq 0$

$Y_{13} - X_{13} - X_{23} \leq 0$ $\quad Y_{14} - X_{14} - X_{24} \leq 0$

$Y_{11}=0.9091Y_{14}$ $\quad Y_{12}=0.8182Y_{14}$

$Y_{13}=0.6364Y_{14}$

$X_{11}=0.75X_{13}$ $\quad X_{12}=0.8X_{13}$

$X_{14}=0.5X_{13}$

$X_{22} > X_{21}$ $X_{23} > X_{22}$
$X_{21} > X_{24}$

$Y_{14},\ X_{13},\ X_{23} \geq 10^{-8}$

olur.

Örnek 1 her KVB ve model için çözüldüğü zaman çizelge 5'teki etkinlik değerleri elde edilir.

Çizelge 5. Sıralı ve Kesin Veri Modellerinin Etkinlik Değerlerinin Örnek 1 ile Karşılaştırılması

	KVB1	KVB2	KVB3	KVB4
Cook-Kress-Seiford	0.9091	0.8182	0.6364	1
Despotis-Smirlis	0.9091	0.8182	0.6364	1
Cooper-Park-Yu	0.9091	0.8182	0.6364	1

3.2. Sıralı, Sınırlandırılmış ve Kesin Veri Modellerinin Karşılaştırılması

Sıralı, sınırlandırılmış ve kesin veriler için önerilen Despotis-Smirlis ve Cooper-Park-Yu modellerinin karşılaştırılması için örnek 2 kullanılmıştır.

Örnek 2: 3 girdi ve 2 çıktı içeren 5 adet KVB için veriler çizelge 6'daki gibidir. (Sınırlandırılmış veriler monotonik artan üyelik fonksiyonuna sahiptir.)

Çizelge 6. Sıralı, Sınırlandırılmış ve Kesin Veri Modelleri Örneği için Veri Çizelgesi

KVB	ÇIKTILAR (y_{rj})		GİRDİLER (x_{ij})	
	Kesin Değerleri Bilinen (y_{1j})	Sınırlandırılmış (y_{2j})	Kesin Değerleri Bilinen (x_{1j})	Sıralı (x_{2j})
1	100	(6, 7)	1500	$x_{22} > x_{21}$
2	90	(8, 9)	1600	$x_{25} > x_{22}$
3	70	(10, 11)	2000	x_{23}
4	110	10	1000	$x_{21} > x_{24}$
5	200	(12, 14)	1900	$x_{23} > x_{25}$

3.2.1. Despotis-Smirlis Modeli

$$E_1 = \max\left(100u_1 + 6u_2 + p_{21}\right)$$

Kısıtlar,

$$1500v_1 + x_{21} = 1$$
$$100u_1 + 6u_2 + p_{21} - 1500v_1 - k_{21} \leq 0$$
$$90u_1 + 8u_2 + p_{22} - 1600v_1 - k_{22} \leq 0$$
$$70u_1 + 10u_2 + p_{23} - 2000v_1 - k_{23} \leq 0$$
$$110u_1 + 10u_2 - 1000v_1 - k_{24} \leq 0$$
$$200u_1 + 12u_2 + 2p_{25} - 1900v_1 - k_{25} \leq 0$$

$k_{22} - k_{21} \geqslant 10^{6}$ $k_{25} - k_{22} \geqslant 10^{6}$
$k_{21} - k_{24} \geqslant 10^{6}$ $k_{23} - k_{25} \geqslant 10^{6}$
$p_{21}-u_2 \leq 0$ $p_{22}-u_2 \leq 0$
$p_{23}-u_2 \leq 0$ $p_{25}-u_2 \leq 0$
$v_1, u_1, u_2 \geq 10^{-8}$

3.2.2. Cooper-Park-Yu Modeli

Her veri ilgili sütundaki maksimum değerli veriye bölünerek ölçek dönüşümü yapılır ve çizelge 7'deki veriler elde edilir.

Çizelge 7. Örnek 2 için Ölçek Dönüşümü Yapılmış Veriler

KVB	ÇIKTILAR (y_{rj})		GİRDİLER (x_{ij})	
	Kesin Değerleri Bilinen (y_{1j})	Sınırlandırılmış (y_{2j})	Kesin Değerleri Bilinen (x_{1j})	Sıralı (x_{2j})
1	0.5	(0.6, 0.7)	0.75	$\hat{x}_{22} > \hat{x}_{21}$
2	0.45	(0.8, 0.9)	0.8	$\hat{x}_{25} > \hat{x}_{22}$
3	0.35	(1, 1.1)	1	1
4	0.55	1	0,5	$\hat{x}_{21} > \hat{x}_{24}$
5	1	(1.2, 1.4)	0.95	$1 > \hat{x}_{25}$

Ölçek dönüşümü sonucu aşağıdaki model elde edilir:

$$E_1 = \max\left(0.5u_1 + u_2\hat{y}_{21}\right)$$

Kısıtlar,

$$0.75v_1 + \hat{x}_{21}v_2 = 1$$
$$0.5u_1 + u_2\hat{y}_{21} - 0.75v_1 - \hat{x}_{21}v_2 \leqslant 0$$
$$0.45u_1 + u_2\hat{y}_{22} - 0.8v_1 - \hat{x}_{22}v_2 \leqslant 0$$
$$0.35u_1 + u_2\hat{y}_{23} - v_1 - v_2 \leqslant 0$$
$$0.55u_1 + u_2 - 0.5v_1 - \hat{x}_{24}v_2 \leqslant 0$$
$$u_1 + u_2\hat{y}_{25} - 0.95v_1 - \hat{x}_{25}v_2 \leqslant 0$$

$1 > \hat{x}_{25}$ $\hat{x}_{22} > \hat{x}_{21}$ $\hat{x}_{25} > \hat{x}_{22}$
$\hat{x}_{21} > \hat{x}_{24}$
$0.6 \leq \hat{y}_{21} \leq 0.7$ $0.8 \leq \hat{y}_{22} \leq 0.9$ $1 \leq \hat{y}_{23} \leq 1.1$
$1.2 \leq \hat{y}_{25} \leq 1.4$
$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-8}$

Aşağıdaki tanımlamalar yapılarak değişken dönüşümü yapılır:

$Y_{11}=0.5u_1$ $Y_{12}=0.45u_1$ $Y_{13}=0.35u_1$
$Y_{14}=0.55u_1$ $Y_{15}=u_1$
$Y_{21}=\hat{y}_{21}u_2$ $Y_{22}=\hat{y}_{22}u_2$ $Y_{23}=\hat{y}_{23}u_2$

$X_{11}=0.75v_1$ $X_{12}=0.8v_1$ $X_{13}=v_1$
$X_{14}=0.5v_1$ $X_{15}=0.95v_1$
$X_{21}=\hat{x}_{21}v_2$ $X_{22}=\hat{x}_{22}v_2$ $X_{23}=v_2$
$X_{24}=\hat{x}_{24}v_2$ $X_{25}=\hat{x}_{25}v_2$
$Y_{24}=u_2$ $Y_{25}=\hat{y}_{25}u_2$

Değişken dönüşümü sonucu model:

$$E_1 = \max(Y_{11} + Y_{21})$$

Kısıtlar,

$X_{11} + X_{21} = 1$

$Y_{11} + Y_{21} - X_{11} - X_{21} \leq 0$ $Y_{12} + Y_{22} - X_{12} - X_{22} \leq 0$

$Y_{13} + Y_{23} - X_{13} - X_{23} \leq 0$ $Y_{14} + Y_{24} - X_{14} - X_{24} \leq 0$

$Y_{15} + Y_{25} - X_{15} - X_{25} \leq 0$

$Y_{11}=0.5Y_{15}$ $Y_{12}=0.45Y_{15}$ $Y_{13}=0.35Y_{15}$
$Y_{14}=0.55Y_{15}$
$X_{11}=0.75X_{13}$ $X_{12}=0.8X_{13}$ $X_{14}=0.5X_{13}$
$X_{15}=0.95X_{13}$
$X_{22}>X_{21}$ $X_{25}>X_{22}$ $X_{21}>X_{24}$ $X_{23}>X_{25}$
$0.6Y_{24}\leq Y_{21}\leq 0.7Y_{24}$ $0.8Y_{24}\leq Y_{22}\leq 0.9Y_{24}$
$Y_{24}\leq Y_{23}\leq 1.1Y_{24}$ $1.2Y_{24}\leq Y_{25}\leq 1.4Y_{24}$
$Y_{15}, Y_{24}, X_{13}, X_{23} \geq 10^{-8}$
olur.

Örnek 2 her KVB ve model için çözüldüğü zaman çizelge 8'deki etkinlik değerleri elde edilir.

Çizelge 8.Sıralı Sınırlandırılmış ve Kesin Veri Modellerinin Etkinlik Değerlerinin

Örnek 2 ile Karşılaştırılması

	KVB1	KVB2	KVB3	KVB4	KVB5
Despotis-Smirlis	0.9091	0.9000	0.9167	1	1
Cooper-Park-Yu	0.9091	0.9000	0.9167	1	1

SONUÇ

Her üç model de aynı probleme uygulandığı zaman aynı etkinlik değerini vermektedir. Modellerde değişken dönüşümü yapıldığı için bu değer KVB'lerin alabileceği en yüksek etkinlik değeridir.

Sıralı veriler; Cook-Kress-Seiford modelinde her 2 KVB arasındaki fark >0 ve en alt sıradaki veri $\geq\delta$, Despotis-Smirlis modelinde her 2 KVB ve KVB'lere verilecek ağırlıkların çarpımı arasındaki fark $\geq\delta$, Cooper-Park-Yu modelinde ise en üst sıradaki veri 1'e eşit (ölçek dönüşümü sonrası) ve her 2 KVB arasındaki fark >0 olarak modele yansıtılmaktadır.
Cook-Kress-Seiford modelinde sıralı verilere verilen ağırlıklar problemin başında u_{rj}^{ℓ} ve v_{ij}^{ℓ} birim matrisleri kullanılarak 1 ya da 0 olacak şekilde değişkenin sırası belirtilerek yansıtılmaktayken, Despotis-Smirlis ve Cooper-Park-Yu modellerinde sıralı veri ve o veriye verilen ağırlığın çarpımı bilinmeyen olarak modele yansıtılmaktadır.

Despotis-Smirlis modelinin bir probleme uygulanabilmesi için sınırlandırılmış bulanık verinin üyelik fonksiyonunun monotonik artan olması gerekirken; Cooper-Park-Yu modeli için herhangi bir sınırlama yoktur.

KAYNAKÇA

COOPER W.W.– K.S. PARK ve G. YU, (1999), "IDEA and AR-IDEA: Models for Dealing with Imprecise Data in DEA", Management Science, Volume: 45, s.597-607.

COOK W.D. – M. KRESS ve L. M. SEIFORD, (1993), "On the Use of Ordinal Data in Data Envelopment", The Journal of the Operational Research Society, Volume: 44, s.133-140.
-------------------- (1996), "Data Envelopment Analysis in the Presence of Both Quantitative and Qualitative Factors", The Journal of the Operational Research Society, Volume: 47, s.945-953.

DESPOTIS D.K. ve Y.G. SMIRLIS, (2002), "Continuous Optimization Data Envelopment Analysis with Imprecise Data", European Journal of Operational Research, Volume: 140, s.24-36.

ORUÇ, K. O., (2008), Veri Zarflama Analizi İle Bulanık Ortamda Etkinlik Ölçümleri ve Üniversitelerde Bir Uygulama, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Isparta.

GUO P. – H. TANAKA, (2001), "Fuzzy DEA: A Perceptual Evaluation Method", Fuzzy Sets and Systems, Volume: 119, s.149-160.

KAO C. ve S.T. LIU, (2000), "Fuzzy Efficiency Measures in Data Envelopment Analysis", Fuzzy Sets and Systems, Volume: 113, s.427-437.

LEON T. – V. LIERN – J.L. RUIZ – I. SIRVENT, (2003), "A Fuzzy Mathematical Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models", Fuzzy Sets and Systems, Volume: 139, s.407-419.

LERTWORASIRIKUL S. – S.C. FANG – J.A. JOINES ve H.L.W. NUTTLE, (2003), "Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA): A Possibility Approach", Fuzzy Sets and Systems, Volume: 139, s.390-392.

SAATI S. ve A. MEMARIANI, (2005), "Reducing Weight Flexibility in Fuzzy DEA", Applied Mathematics and Computation, Volume: 161, s.811-822.

-------------------- ve G.R. JAHANSHAHLOO, (2002), "Efficiency Analysis and Ranking of DMU's with Fuzzy Data", Fuzzy Optimization and Decision Making, Volume: 1, s.255-267.

ULUCAN A., (2002), "İSO500 Şirketlerinin Etkinliklerinin Ölçülmesinde Veri Zarflama Analizi Yaklaşımı: Farklı Girdi Çıktı Bileşenleri ve Ölçeğe Göre Getiri Yaklaşımları ile Değerlendirmeler", Ankara Üniversitesi, Siyasal Bilgiler Fakültesi Dergisi, Cilt 57-2, s.185-202.