Trigonometrik Fonksiyonların Toplam ve Fark Formüllerinin Ortaöğretim Düzeyinde Görselleştirilmesi

Birol TEKİN[1] ve Alper Cihan KONYALIOĞLU[2]

Özet

İspat matematikçilerce, matematik alanının ve uygulamasının temeli olarak görülür. Birçok öğrenci ise niçin ispat yapmayı öğrenmek zorunda olduklarına anlam verememektedir. Trigonometri ortaöğretim matematik müfredatının önemli bir konusudur. Trigonometriyle çalışırken öğrencilerin çoğu eşitlikleri ezberlemekte ve bunları rutin alıştırmaları çözmek için uygulamaktadırlar. Öğrencilerden trigonometride ispat yapmaları istendiğinde, eşitlikleri taraf tarafa toplamaya dayalı cebirsel dönüşümler yapmaktadırlar. Trigonometri kavramlarını öğrencilerin daha iyi anlamalarını sağlamak için görsel ispatlar yararlı olabilir. Bu çalışmada toplam ve fark formüllerinin görsel şekillerle ispat edilmesi ve bunların diğer araştırmacılara tanıtılması amaçlanmıştır. Bu amaçla görsel ispat ve cebirsel ispat sırasıyla yapılmış ve bunlarla ilgili bazı öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Görselleştirme, toplam ve fark formülleri, görsel ispat, cebirsel ispat

[1]Öğretmen (Doktora Öğrencisi), Amasya Anadolu Lisesi, Amasya. E-mail: biroltekin95@mynet.com

[2]Yrd.Doç Dr. Atatürk Üni, Kazım Karabekir Eğt. Fak. OFMA Eğitimi Bölümü, Erzurum.

Abstract

Proof is viewed by mathematicians as central to the discipline and practice of mathematics. Most students are unable to understand why they must learn how to write a proof. Trigonometry is an important subject in the secondary school mathematics curriculum. When studying trigonometry, most students just have to memorize a set of identities and to apply them to solve routine exercises. When students are asked to do proofs in trigonometry, they do some proofs usually consist of algebraic transformations linking a side of an identity to the other side. To promote students' understanding of trigonometric concepts, visual proofs may be beneficial. In this study, it is aimed to prove the sum and difference formulas in trigonometry by visual figures and to introduce them to other researchers. For this goal, visual proof and algebraic proof processes were made respectively and some suggestions were given about them.

Key Words: Visualization, sum and difference formulas, visual proof, algebraic proof,

Giriş

Matematik; tabiatta bulunan nesneleri, olayları ve durumları modellemeye çalışan, gerçek dünyayı açıklamak için soyut kavramlar geliştiren ve soyut kavramlar arasındaki ilişkilerden oluşan önemli bir disiplindir. Matematik öğretim programlarında ispat konusu, önemli bir yer tutmaktadır. İspatlar, matematiğin bugünkü bilgi birikimine ulaşmasında büyük rol oynamışlardır. Yunanlıların Öklit (Euclid) geometrisindeki ispatlardan farklı kültürlerdeki çeşitli ispat şekillerine kadar ve hatta 20. yy.daki formal matematiğin dayandığı küme teorisine ve akıl yürütme yollarından biri olan tümdengelim süreçlerine kadar birçok matematik kavramı ispat süreci sayesinde geliştirilmiştir. Hanna ve Williers (2008) matematikte ispat konusuna müfredatlarda yeniden vurgu yapılmaya başladığını, bu eğilimin ABD'deki National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000)'in standartlarında ve bir çok ülkenin matematik müfredatında gözlendiğini ifade etmişlerdir. Matematik müfredatlarının önemli bir kısmını ispatlar oluştursa da, bir çok lise ve üniversite öğrencisi ve hatta bazı matematik öğretmenleri bile ispatın yapısı ve doğası hakkında yüzeysel düşüncelere sahiptirler (Gravina, 2000; Duval, 2002; Özer ve Arıkan, 2002; Conner, 2007; Gravina, 2008; Sarı, 2008; Brown, Stillman, Schwarz & Kaiser, 2008). Hanna ve Williers (2008), lise öğrencilerinin ispat yaparken matematikte sıkça kullanılan tümdengelime dayalı işlemleri tercih ettiklerini ancak ispatın özünü yeterince anlayamadıklarını belirtmiştir. Çünkü matematik derslerinde yapılan ispatların çoğu cebirsel olarak yapılmaktadır. Bu şekilde, öğrenciler cebirsel ifadeleri yeniden düzenleyerek ispat yapmaktadırlar. Böylesi bir ispat süreci de ispatı oluşturan bileşenlerin kavramsal temellerinin yeterince anlaşılmamasına neden olmaktadır.

Hanna ve Sidoli (2007) görsel gösterimlerin matematikteki ispat sürecinde kullanımı ve olası katkıları üzerine yoğunlaşan çalışmasında, görselleştirmenin ispatların anlaşılması üzerine olumlu katkıları olduğunu ifade etmiştir. Özellikle bilgisayarlarla yapılan görselleştirmelerin öğrencilerin bir çok matematiksel kavramı görsel olarak keşfetmelerine veya incelemelerine imkan tanıdığına ve böylece matematiğin daha anlaşılır hale geldiğine vurgu yapmıştır. Görsel gösterimlerin ispata yardımcı olabileceğini, ispatı bütünleştirebileceğini yada tek başına ispatın kendisi olabileceğini söylemiştir. Görselleştirmenin daha çok ispatı bütünleyen ve ispat sürecine yardım eden rolünün ağırlıkta olduğu, çok az matematikçinin görsel çizimi ispat olarak kabul ettiğini de belirtmiştir.

İspat sürecine görsel bir çizimden başlamak, özellikle ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerin ispatları daha iyi anlaması için bir seçenek olabilir. Rahim ve Siddo (2009), görselleştirmenin matematiksel düşünmedeki rolüne vurgu yapan çalışmasında, görselleştirmenin ve görsel düşünmenin sadece geometri ile sınırlı kalmamasını; matematiksel süreçleri ve kavramları anlamada da kullanılması gerektiğini ifade etmiştir.

Karadağ ve McDougall (2009), öğrenme süreci sonunda zihinlerde temsiller oluşturmanın çok önemli olduğunu, görselleştirme ile yapılan öğretim sonunda öğrencilerin zihinlerinde gözledikleri olaylarla yada bir matematik kavramıyla ilgili görsel temsillerin daha kolay oluştuğunu ifade etmiştir ki bu durumda görsel temsiller kavramları anlamak için birer vasıta olurlar ve öğrenme sürecini desteklerler. Malaty (2009) de çalışmasında görselleştirmenin neden-sonuç ilişkisine dayalı düşünmeyi destekleyip desteklemediğine odaklanmıştır. Ders kitaplarında bir çok çizim kullanıldığını ancak bunun yeterli olmadığını; öğrencilere yapılan görselleştirmedeki matematiksel anlamları çıkarma yollarının da öğretilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Aksi takdirde öğrencilerin görsel modellerden yararlanamayacaklarını söylemiştir.

Aslına bakılırsa ilk çağlarda yaşamış olan matematikçiler, birçok kavramı, kuralı ve matematiksel bilgiyi üretirken görsel çizimlerden yararlanmışlardır. Ancak yirminci yüzyıla gelindiğinde, ispat sürecinde çizim yapma alışkanlığı iyice azalmış ve bunun sonucunda ispatlar sadece cebirsel işlemler süreci olarak algılanmaya başlamıştır (Alsina ve Nelsen, 2006). Oysa ki matematiğin ve matematiksel düşünmenin önemli bir parçası olan ispatlarda görselleştirme yapılması öğrenci kazanımlarına büyük katkılar sağlayacaktır. İspat sürecinde görsel sunumlar veya gösterimler kullanılması, en başta öğrencilere ispat için cebirsel yöntemin dışında, farklı bir bakış açısı kazandırır. Bu bakış açısı öğrencinin görsel ve cebirsel düşünme süreçlerini beraberce işletmesine imkan tanır ve sonuçta yapılan ispat daha kalıcı ve anlamlı öğrenilir. Öğrencilerin cebirsel ispatı daha iyi anlamalarına yardımcı olan görsel ispatlar matematik öğretiminde daha fazla kullanılmalıdır.

2. Görselleştirme ve görsel ispatlar

Soyut matematik kavramlarının anlaşılmasında, gösterimler (representations) ve görselleştirmeler (visualizations) çekirdek görevi görür. Görselleştirme sayesinde matematik kavramlarını duyu organları aracılığıyla algılamak mümkün hale gelir (Bagni, 1998). Çünkü insanın görme becerisi çoğu şeyi görmek için yeterli değildir. Bazı şeyler çok küçük ya da çok uzakta oldukları için görülemezler. Bunların görülmesi için insanoğlu mikroskop teleskop gibi çeşitli araçlar geliştirmiştir. Ancak bazı şeyleri görebilmek için her hangi bir araç kullanmak da mümkün değildir. Soyut matematik kavramları da bu **görünemeyenler** arasındadır (Arcavi 2003). Gözle görülmeyen matematik kavramlarının anlaşılması için, soyut kavramların mümkün olduğunca görünür ve hayal edilebilir hale getirilmesi gerekir. Görselleştirme bir nesneyi, bir eylemi yada süreci görülebilir yapar. Yani *görselleştirme* **(visualization) görünmeyeni görünür yapan bir metottur (**McCormick vd., 1987, p.3; Bagni, 1998).

Görünmeyeni görünür yapmada kullanılan araçlar; resimler, çizimler, şekiller, görüntüler, diyagramlar, tablolar gibi iki boyutlu yada üç boyutlu modeller olabilir. Bilindiği üzere matematikte yer alan kavramlar son derece soyut kavramlardır. Öğrencilerin matematiği anlamada yaşadıkları zorluklar, matematik eğitimcilerini öğretimde anlamayı destekleyen yol ve yöntemler araştırmaya sevk etmiştir. Bu bağlamda özellikle son 20 yılda matematik eğitimcileri, matematik eğitim-öğretiminde görselleştirmeye dikkate değer bir önem vermeye başlamışlardır. İnsandaki düşünme sürecinin bir parçası olan görsel imajların öğrenme ve anlamaya katkılarını vurgulayan birçok çalışma yapılmıştır (Arcavi, 2003; Duval, 2002; Tall, 2004; Guzman, 2002; Stylianou ve Silver, 2004; Delice, 2004; Presmeg, 2006). Son yıllarda ayrıca "Sözsüz İspatlar" (Proof Without Words) akımı popüler olmuş; bilimsel ve güncel dergilerde, gazetelerde vb. oldukça fazla yerini almıştır (Alsina ve Nelsen 2006).

Matematikte görselleştirme konusuna değinen çalışmalara bakıldığında matematiksel düşünmeye, anlamaya, problem çözmeye ve ispat sürecine katkılarına odaklanan çalışmalar görmek mümkündür. Örneğin Tall (2004), matematiksel düşünmede görselleştirmenin rolü üzerinde durmuştur. Öğrencilerin matematiği öğrenirken duyusal-edimsel, görüntüsel ve sembolik zihinsel faaliyetlerinin beraberce işlemesi gerektiğini, sadece bir kavramın gösterilmesinin yetmeyeceğini, öğrencinin kavramla ilgili çeşitli işlemler yapması gerektiğini söylemiştir. Görselleştirme ister bilgisayarda yapılsın isterse kağıt kalemle yapılsın bu sürecin yaşanması gerektiğini vurgulamıştır. Arcavi (2003) matematik kavramlarının öğretiminde ve öğrenilmesinde görselleştirmenin rolüne odaklı çalışmasında, görselleştirmenin görünmeyeni görünür yapma gücünden bahsetmiş; matematik kavramlarının soyut olması nedeniyle görünür hale getirilmesinin kavramları öğrenmede yararlı olduğu üzerinde durmuştur. Çalışmasında çeşitli matematik kavramlarının görsel sunumlarının nasıl yapılacağı konusunda örnekler vermiştir.

Duval (2002) çalışmasında, matematiksel düşünmede görselleştirmenin bilişsel rolünü açıklamıştır. Görselleştirmenin matematiği anlamada özellikle de geometride çekirdek rolünde olduğunu ve bu rolün öğrenmeye nasıl etki ettiğinin çeşitli yönleriyle araştırılması gerektiğini ifade etmiştir. Okullarda bir çok öğrencinin matematiği öğrenirken sorun yaşadığını, bu nedenle matematik alanını seçen ve bu yolda ilerleyen öğrenci sayısının çok az olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin bir çoğu için matematikteki ispatları yapmanın anlamsız işlemler süreci olduğunu, bu düşüncenin mutlaka değiştirilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu düşüncenin değişmesi için ispat sürecine öğrencinin aktif katılımının sağlanmasını, ispatların görselleştirme gibi farklı yollarla yapılmasını, ispat sürecini keşfetmelerine fırsat verilmesini ve öğrencilerin motive edilmelerini önermiştir.

Dufour-Janvier et al.(1987) matematik eğitiminde görselleştirmenin yararlarını 4 başlık altında toplamıştır: 1. görsel gösterimler matematiğin ayrılamaz bir parçasıdır, 2. görsel gösterimler bir kavramı çeşitli şekillerde somutlaştırmayı sağlar, 3. görsel gösterimler kavramların anlaşılmasında yaşanan bazı zorlukları yenmeye yardımcı olur, 4. görsel gösterimler matematiği daha ilginç ve etkileyici hale getirir. Bu yararların öğrencilerin matematiği anlamaları açısından çok önemli olduğunu, bu nedenle görselleştirmenin matematik öğretiminde kullanılması gerektiğini ifade etmiştir.

Presmeg (2006) çalışmasında görselleştirmeyle ilgili yapılan bir çok çalışmayı incelemiş ve görselleştirmeyle ilgili çalışma yapmak isteyenlere önerilerde bulunmuştur. Matematik eğitiminde 1980'li yıllardan sonra yapılandırmacı yaklaşımın daha baskın hale geldiğini, görsel düşünmenin matematik eğitim öğretimindeki rolünün araştıran nitel çalışmaların artış gösterdiğini söylemiştir. Matematikteki ispatların öğretiminde görselleştirmenin yararlı bir yöntem olduğunu ifade etmiştir. Çalışmasının sonunda oniki araştırma sorusu ortaya çıkarmış ve bu araştırma sorularının araştırılmasını önermiştir. Örneğin bu sorulardan biri “Matematiksel soyutlama ve genellemede görselleştirme nasıl katkı sağlamaktadır?” sorusudur.

Hanna & Williers (2008) çalışmasında, görselleştirmenin matematiksel ispat sürecine katkılarını araştırmıştır. Matematikteki ispatların çoğunlukla cebirsel olarak yapıldığını bu durumda bir çok öğrencinin ispatların niçin yapıldığını tam anlamadığını, görselleştirmenin ispat sürecini desteklediğini ifade etmiştir. Görsel ispatların, öğrencilerin matematikteki ispatlara farklı bir açıdan bakma becerisi kazanmasına katkı sağladığı, daha fazla duyu organına hitap ettiği için öğrenmeyi ve hatırlamayı kolaylaştırdığını tespit etmiştir.

Pettinelli (2008) çalışmasında kolayca resmedilen şeylerin hatırlanması ve anlaşılmasının kolay olduğunu; çünkü görsel görüntülerin insanda daha fazla duygusal deneyim oluşmasını sağladığını ve duygusal deneyimler attıkça da anlama ve hatırlamanın kolaylaştığını vurgulamıştır. Küçük ve karmaşık şeyleri anlamanın ve hatırlamanın zor olduğunu, çünkü insanoğlunun resimlerle düşündüğünü söylemiştir. Kolay resmedilen şeylerin kolay anlaşılacağını ifade etmiştir.

Hanna ve Sidoli (2007) de ispatların görselleştirilmesiyle ilgili çalışmasında bu konuya değinmiş; görsel ispat yapmanın en başta gelen amacının ilgili matematiksel kavramı açıklamak ve daha anlaşılır hale getirmek olduğunu ifade etmiştir. Matematik eğitim-öğretiminin temel amacının matematik kavramlarının daha iyi anlaşılmasını sağlamak olduğu düşünüldüğünde, görsel ispatların önemi daha da iyi anlaşılmaktadır.

Sarı (2008)'nın aktardığına göre Moore (1994) öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları zorlukların 7 büyük nedeni olduğunu tespit etmiştir. Bu nendeler şunlardır: Öğrencilerin; 1. tanımları ve bunları ifade etmeyi bilmemeleri, 2. kavramları sezgisel olarak çok az anlamaları, 3. zihinlerindeki kavram imajlarının ispat yapmak için yeterli olmaması, 4. kendi örneklerini üretmekte ve kullanmakta isteksiz davranmaları yada bunu yapamamaları, 5. ispat yaparken tanımları nasıl kullanacaklarını bilmemeleri, 6. matematiksel dili ve işaretleri kullanmayı bilmemeleri ve 7. ispata nasıl başlayacaklarını bilmemeleridir. Öğrencilerin ispatla ilgili yaşadıkları zorlukların aşılmasında, görsel ispatlar yardımcı olabilir.

Borwein ve Jörgenson (1997)' a göre, cebirsel ispatla görsel ispatı ele aldığı çalışmasında, iki ispat türü arasındaki farklara değinmiştir. Cebirsel ispat geçerli bir dizi işlemin sonucunda varılan çıkarımdır ve geleneksel olarak cümlesel bir yolla sunulur. Görsel ispatta ise sabit bir görüntü oluşturulur. İyi bir görsel ispat, cebirsel ispatta olan bilgileri aynen yansıtabilmelidir. Yine Borwein ve Jörgenson (1997)' a göre kabul edilebilir bir görsel ispat üç şartı sağlamalıdır:

1)Güvenirlik(Reliability) : İspat güvenilir olmalıdır, her kontrolde değişik sonuç vermemelidir.

2)Tutarlılık(Consistency): İspat, bilinen gerçeklerle, inançlarla ve ispatlarla tutarlı olmalıdır.

3)Tekrarlanabilirlik(Repeatability): İspatı başkaları da yapılabilmeli veya gösterilebilmelidir.

Bu üç kriter cebirsel ispatlar için de geçerlidir. Ancak görsel ispatlarda mutlaka göz önüne alınmalıdır.

O halde öğrencilerin matematiği daha iyi anlamasını sağlamak için derslerde cebirsel ispatlar ve görsel ispatlar beraberce sunulabilir. Bu çalışmada trigonometride önemli yer tutan toplam ve fark formüllerinin ispatında, görsel çizimlerden başlayıp adım adım ilerleyen sürecin tanıtılması amaçlanmıştır. Böylece öğrenciler ve öğretmenler için daha anlamlı olacağına inanılan ezberden uzak bir yaklaşım sunulmaya çalışılmıştır. Çalışma, toplam ve fark formüllerinin öğretimine bir alternatif olması açısından teorik olarak tasarlanmıştır.

3. Toplam ve Fark Formülleri

Trigonometri matematiğin önemli bir konusudur. Ortaöğretimde 10. sınıf matematik öğretim programındaki trigonometri öğrenme alanının kazanımları incelendiğinde; öğrencilerin trigonometrik fonksiyonları anlamaları, uygulama yapabilmeleri, sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant kavramlarını kullanarak değişik problem durumlarını çözebilmeleri, toplam ve fark formüllerinden yararlanarak farklı geometrik durumlarda istenen açı değeri, mesafe, yükseklik gibi değerleri bulmaları gibi kazanımlar hedeflenmektedir (MEB, 2006). Ortaöğretimde trigonometrideki toplam ve fark formülleri öğretilirken genellikle formüller bir liste halinde verilir ve öğrencilerin bu listeyi ezberlemeleri istenir. Toplam ve fark formülleriyle ilgili uygulamalar yapılır. Ancak bu formülerin çıkarıldığı geometrik görselleştirmeler yapılmaz (Delice 2004). Bu durumda öğrenciler de bu formüleri anlamaktan öte sadece ezberlerler. Oysaki günümüzün matematik öğretimi ezberi değil anlamayı ön plana çıkarmaktadır. Aşağıda formüllerin görsel ve cebirsel ispatları verilmiştir. Görsel ispatlar yapılırken "Math Made Visual" (Alsina and Nelsen, 2006)'den yararlanılmıştır.

4. Toplam ve fark formüllerinin görsel ve cebirsel anlamı

1.

$\text{Sin}\,(\alpha+\beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha$, $\text{Sin}\,(\alpha-\beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha$ ve

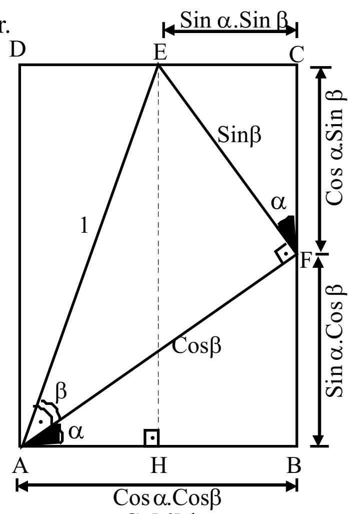
$Cos\,(\alpha+\beta) = Cos\,\alpha.Cos\,\beta - Sin\,\alpha.Sin\,\beta$, $\text{Cos}\,(\alpha-\beta) = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$

toplam ve fark özdeşliklerinin geometrik olarak ispatını yapmak için; öncelikle

koordinat sisteminde, A merkezli(Orijin) $|AE| = r = 1$ br olan birim çember üzerinde ve $m(A\hat{F}B) = 90^0$ olacak şekilde Şekil 1 deki şekli oluşturalım.

$m(F\hat{A}B) = \alpha$ ve $m(E\hat{A}F) = \beta$ olsun. ABF üçgeni ile FCE üçgenlerin benzerliğinden;

$A\overset{\Delta}{B}F \cong F\overset{\Delta}{C}E \Rightarrow m(F\hat{A}B) = m(E\hat{F}C) = \alpha$ bulunur.



Şekil 1

Dar açıların trigonometrik oranlarından yararlanarak;
AFE dik üçgeninden;

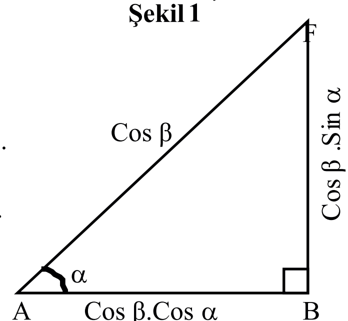
$$\text{Sin}\beta = \frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|EF|}{1} \Rightarrow |EF| = \text{Sin}\beta \quad \text{ve}$$

$$\text{Cos}\beta = \frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AF|}{1} \Rightarrow |AF| = \text{Cos}\beta \quad \text{bulunur.}$$

AFB dik üçgeninden (Şekil 1a);

$$\text{Sin}\alpha = \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{\text{Cos}\,\beta} \Rightarrow |BF| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta \quad \text{ve}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AB|}{\text{Cos}\,\beta} \Rightarrow |AB| = \text{Cos}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha \quad \text{bulunur}$$



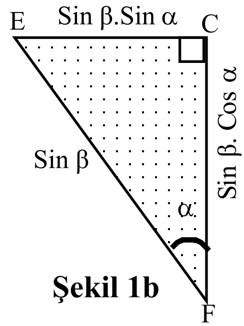
Şekil 1a

FEC dik üçgeninden(Şekil 1b);

$$\text{Sin}\alpha = \frac{|EC|}{|EF|} = \frac{|EC|}{\text{Sin}\,\beta}$$

$$\Rightarrow |EC| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|FC|}{|EF|} = \frac{|FC|}{\text{Sin}\,\beta} \Rightarrow |FC| = \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha \text{ bulunur.}$$



Şekil 1b

Şekil 1'den yararlanarak AH ve BC uzunlukları,

$$|AH| = |AB| - |HB| = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$$

$$|EH| = |BC| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta \quad \text{ve } m(E\hat{A}B) = \alpha + \beta \quad \text{bulunur.}$$

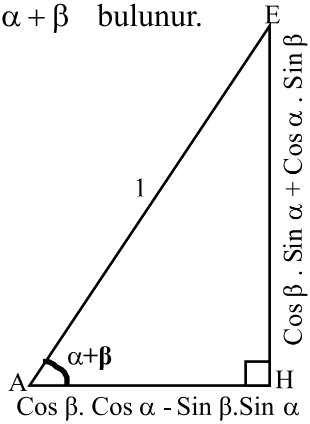
A. AEH dik üçgeninden(Şekil 1c) ;

$$\text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \frac{|EH|}{|AE|} = \frac{\text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta}{1}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}(\alpha + \beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha$$

formülü elde edilir.

B. AEH dik üçgeninden(Şekil 1c);



Şekil 1c

$$\text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \frac{|AH|}{|AE|} = \frac{\text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta}{1}$$

$$\Rightarrow \text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$$

trigonometrik özdeşliği elde edilir.

C. $\text{Sin}\,(\alpha+\beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha$ ve $\text{Cos}\,(\alpha+\beta) = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$ formüllerinde; β yerine $-\beta$ yazılarak $\text{Sin}\,(\alpha-\beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha$ ve $\text{Cos}\,(\alpha-\beta) = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$

trigonometrik özdeşliklerinin **cebirsel gösterimini** elde edebiliriz.

$$\text{Sin}\,(\alpha + (-\beta)) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}(-\beta) + \text{Sin}\,(-\beta).\text{Cos}\,\alpha \qquad , \; Sin(-\beta) = -Sin\beta$$

$$\text{Sin}(\alpha - \beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos}\,(\alpha + (-\beta)) = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,(-\beta) - \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,(-\beta) \qquad \text{Cos}(-\beta) = \text{Cos}\beta$$

$$\text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$$

Ancak bu formülleri geometrik ispatını yapmak için Şekil 2'den yararlanabiliriz.

B. ADE dik üçgeninden(Şekil 2c);

$$\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)=\frac{|BC|}{|AE|}=\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta}{1}$$

$\Rightarrow \mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Cos}\beta-\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta$ formülü elde edilir.

3.

$$\mathrm{Tan}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{Tan}\,\alpha+\mathrm{Tan}\,\beta}{1-\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}\beta}$$

toplam ve fark özdeşliklerinin geometrik olarak ispatını yapmak için; öncelikle koordinat sisteminde, A merkezli (Orijin) $|AB|=r=1\,\mathrm{br}$ olan birim çember üzerinde ve $m(AK\hat{E}B)=90^0$ olacak Şekil 3 modelini oluşturalım. $m(E\hat{A}K)=\beta$ ve $m(K\hat{A}B)=\alpha$ olsun. KAB üçgeni ile EKC üçgeninin benzerliğinden

$\overset{\Delta}{KAB}\cong\overset{\Delta}{EKC} \Rightarrow m(K\hat{A}B)=m(E\hat{K}C)=\alpha$ ve

$m(E\hat{A}B)=\alpha+\beta$ bulunur.

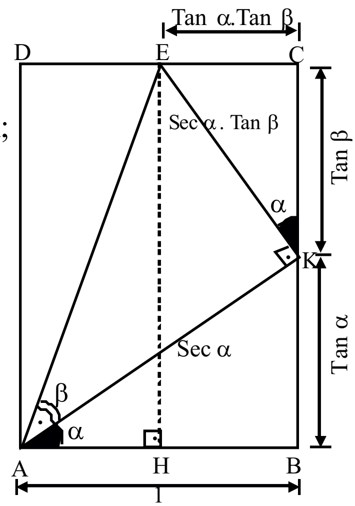
Dar açıların trigonometrik oranlarından yararlanarak;

KAB dik üçgeninden;

$$\mathrm{Tan}\alpha=\frac{|BK|}{|AB|}=\frac{|BK|}{1}\Rightarrow |BK|=\mathrm{Tan}\,\alpha \text{ ve}$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha=\frac{|AB|}{|AK|}=\frac{1}{|AK|}\Rightarrow |AK|=\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha}=\mathrm{Sec}\,\alpha$$

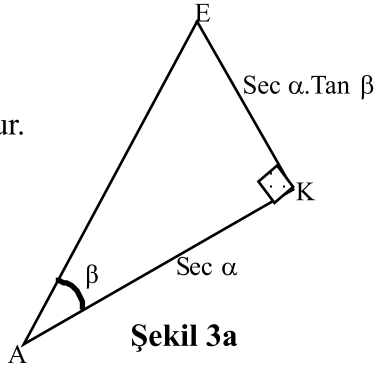
bulunur.



Şekil 3

EAK dik üçgeninden(Şekil 3a);

$$\mathrm{Tan}\beta=\frac{|EK|}{|AK|}=\frac{|EK|}{\mathrm{Sec}\,\alpha}\Rightarrow |EK|=\mathrm{Sec}\,\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta \text{ bulunur.}$$



Şekil 3a

2. $m(E\hat{A}F) = \beta$ ve $m(F\hat{A}D) = \alpha$ olsun.

$m(E\hat{A}D) = \alpha - \beta$ bulunur.

ABF üçgeni ile FCE üçgenlerinin benzerliğinden;

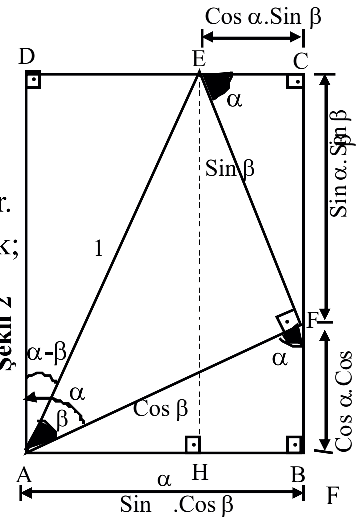
$A\overset{\Delta}{B}F \cong F\overset{\Delta}{C}E \Rightarrow m(A\hat{F}B) = m(F\hat{E}C) = \alpha$ bulunur.

Dar açıların trigonometrik oranlarından yararlanarak;

AFE dik üçgeninden;

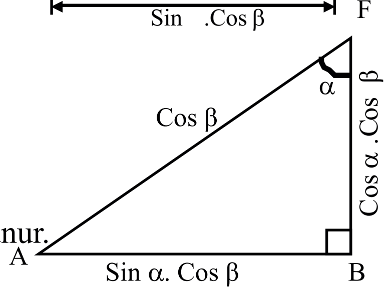
$$\text{Sin}\beta = \frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|EF|}{1} \Rightarrow |EF| = \text{Sin}\beta \text{ ve}$$

$$\text{Cos}\beta = \frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AF|}{1} \Rightarrow |AF| = \text{Cos}\beta \text{ elde edilir.}$$



Şekil 2

AFB dik üçgeninden(Şekil 2a);

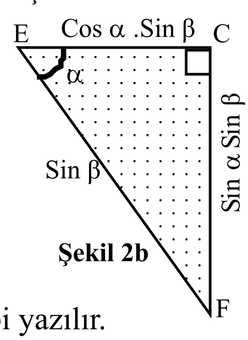


Şekil 2a

$$\text{Sin}\alpha = \frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AB|}{\text{Cos}\,\beta} \Rightarrow |AB| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta \text{ ve}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{\text{Cos}\,\beta} \Rightarrow |BF| = \text{Cos}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha \text{ bulunur.}$$

FEC dik üçgeninden(Şekil 2b);



Şekil 2b

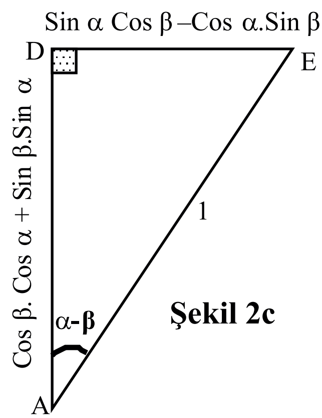
$$\text{Sin}\alpha = \frac{|FC|}{|EF|} = \frac{|FC|}{\text{Sin}\,\beta} \Rightarrow |FC| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta \text{ ve}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|EC|}{|EF|} = \frac{|EC|}{\text{Sin}\,\beta} \Rightarrow |EC| = \text{Sin}\,\beta.\text{Cos}\,\alpha \text{ bulunur.}$$

Şekil 2 den yararlanarak AH ve BC uzunlukları aşağıdaki gibi yazılır.

$$|AH| = |DE| = |AB| - |HB| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\beta - \text{Cos}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$$

$$|EH| = |BC| = |AD| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\beta + \text{Sin}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta$$



Şekil 2c

A. ADE dik üçgeninden(Şekil 2c);

$$\text{Sin}\,(\alpha - \beta) = \frac{|DE|}{|AE|} = \frac{\text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha.\text{Sin}\,\beta}{1}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,(\alpha - \beta) = \text{Sin}\,\alpha.\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\beta.\text{Cos}\,\alpha$$

formülü elde edilir.

EKC dik üçgeninden(Şekil 3b);

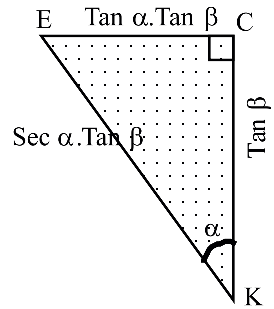
$$\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{|EC|}{|EK|} = \frac{|EC|}{\mathrm{Sec}\ \alpha.\mathrm{Tan}\ \beta} \Rightarrow$$

$$|EC| = \mathrm{Sin}\ \alpha.\mathrm{Sec}\,\alpha.\mathrm{Tan}\ \beta = \sin\ \alpha.\frac{1}{\mathrm{Cos}\ \alpha}.\mathrm{Tan}\ \beta = \mathrm{Tan}\ \alpha.\mathrm{Tan}\ \beta$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{|KC|}{|EK|} = \frac{|KC|}{\mathrm{Sec}\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta} \Rightarrow$$

$$|KC| = \mathrm{Cos}\ \alpha.\mathrm{Sec}\,\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta = \mathrm{Cos}\,\alpha.\frac{1}{\mathrm{Cos}\ \alpha}.\mathrm{Tan}\,\beta = \mathrm{Tan}\,\beta$$

bulunur.



Şekil 3b

Şekil 3 den yararlanarak AH ve BC uzunlukları aşağıdaki gibi yazılır.

$$|AH| = |AB| - |HB| = 1 - \mathrm{Tan}\ \alpha.\mathrm{Tan}\,\beta$$

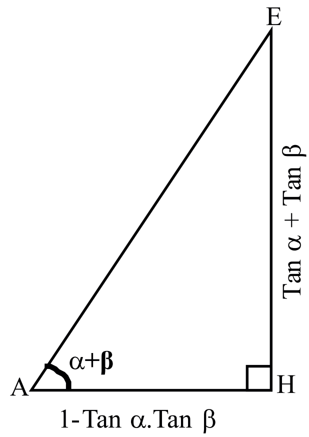
$$|EH| = |\,BC| = \mathrm{Tan}\ \alpha + \mathrm{Tan}\ \beta \quad \text{elde edilir.}$$

A. AEH dik üçgeninden(Şekil 3c);

$$\mathrm{Tan}\,(\alpha+\beta) = \frac{|EH|}{|AH|} = \frac{\mathrm{Tan}\ \alpha + \mathrm{Tan}\,\beta}{1-\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tan}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{Tan}\,\alpha + \mathrm{Tan}\,\beta}{1-\mathrm{Tan}\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta}$$

elde edilir.



Şekil 3c

B. AEH dik üçgeninden (Şekil 3c);

$$\mathrm{Cotg}\,(\alpha+\beta) = \frac{|AH|}{|EH|} = \frac{1-\mathrm{Tans}\ \alpha.\mathrm{Tan}\ \beta}{\mathrm{Tan}\,\alpha + \mathrm{Tan}\,\beta} = \frac{1}{\mathrm{Tan}(\alpha+\beta)}$$

C. $\mathrm{Tan}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{Tan}\,\alpha + \mathrm{Tan}\beta}{1-\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta}$ ve $\mathrm{Cotg}(\alpha+\beta) = \frac{1-\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta}{\mathrm{Tan}\,\alpha+\mathrm{Tan}\beta} = \frac{1}{\mathrm{Tan}\,(\alpha+\beta)}$ formüllerinde β yerine $-\beta$ yazılarak ve $\mathrm{Tan}\,(\alpha-\beta)$ ve $\mathrm{Cotg}(\alpha-\beta)$ Trigonometrik Özdeşliklerinin **cebirsel gösterimini** elde edebiliriz.

$$\mathrm{Tan}(\alpha+(-\beta)) = \mathrm{Tan}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{Tan}\,\alpha + \mathrm{Tan}(-\beta)}{1-\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}(-\beta)} = \frac{\mathrm{Tan}\,\alpha - \mathrm{Tan}\,\beta}{1+\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}\,\beta}$$

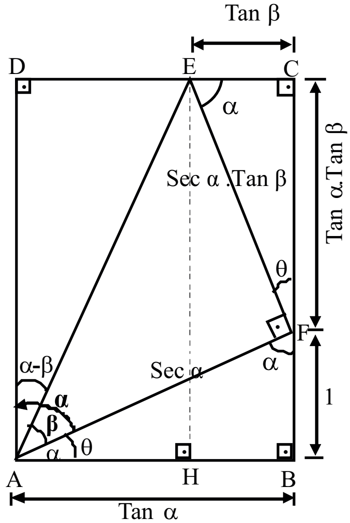
$$\mathrm{Cotg}(\alpha+(-\beta)) = \mathrm{Cotg}(\alpha-\beta) = \frac{1-\mathrm{Tan}\,\alpha.\mathrm{Tan}(-\beta)}{\mathrm{Tan}\,\alpha+\mathrm{Tan}(-\beta)} = \frac{1}{\mathrm{Tan}(\alpha+(-\beta))} = \frac{1}{\mathrm{Tan}(\alpha-\beta)}$$

Ancak bu formülleRi geometrik ispat etmek için Şekil 4 deki modelden yararlanabiliriz.

4.

$|BF| = 1\,\text{br}$, $m(E\hat{A}F) = \beta$ ve $m(F\hat{A}D) = \alpha$ olsun. $m(E\hat{A}D) = \alpha - \beta$ bulunur.

ABF üçgeni ile FCE üçgenlerinin benzerliğinden;



$A\overset{\Delta}{B}F \cong F\overset{\Delta}{C}E \Rightarrow m(A\hat{F}B) = m(F\hat{E}C) = \alpha$ olur.

Dar açıların trigonometrik oranlarından yararlanarak;

AFB dik üçgeninden;

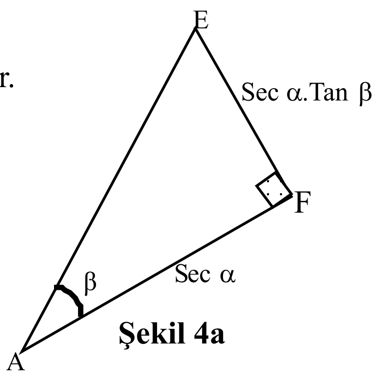
$$\text{Tan}\alpha = \frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \text{Tan}\ \alpha \ \text{ ve}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{1}{|AF|} \Rightarrow |AF| = \frac{1}{\text{Cos}\,\alpha} = \text{Sec}\ \alpha$$

bulunur.

EAF dik üçgeninden(Şekil 4a);

$$\text{Tan}\beta = \frac{|EF|}{|AF|} = \frac{|EF|}{\text{Sec}\,\alpha} \Rightarrow |EF| = \text{Sec}\,\alpha.\text{Tan}\ \beta \ \text{ bulunur.}$$



Şekil 4a

FEC dik üçgeninden(Şekil 4b);

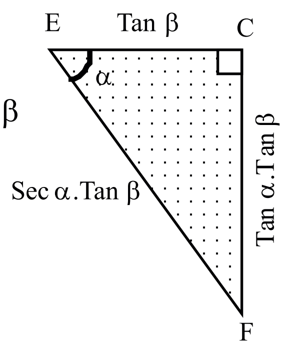
$$\text{Sin}\alpha = \frac{|FC|}{|EF|} = \frac{|FC|}{\text{Sec}\,\alpha\ \text{Tan}\,\beta} \Rightarrow$$

$$|FC| = \text{Sin}\,\alpha.\text{Sec}\alpha.\text{Tan}\ \beta = \sin\alpha.\frac{1}{\text{Cos}\,\alpha}.\text{Tan}\ \beta = \text{Tan}\ \alpha.\text{Tan}\,\beta$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|EC|}{|EF|} = \frac{|EC|}{\text{Sec}\alpha.\text{Tan}\,\beta} \Rightarrow$$

$$|EC| = \text{Cos}\,\alpha.\text{Sec}\,\alpha.\text{Tan}\ \beta = \text{Cos}\,\alpha.\frac{1}{\text{Cos}\,\alpha}.\text{Tan}\,\beta = \text{Tan}\ \beta$$

bulunur.



Şekil 4b

Şekil 4 den yararlanarak,

$$|AH| = |DE| = |AB| - |HB| = \text{Tan}\,\alpha - \text{Tan}\,\beta \text{ ve}$$

$$|EH| = |BC| = |AD| = 1 + \text{Tan}\,\alpha.\text{Tan}\,\beta \text{ bulunur.}$$

A. ADE dik üçgeninden(Şekil 4c);

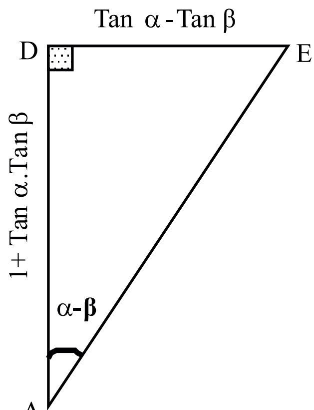
$$\text{Tan}\,(\alpha - \beta) = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{\text{Tan}\,\alpha - \text{Tan}\,\beta}{1 + \text{Tan}\,\alpha.\text{Tan}\beta}$$

formülü elde edilir.

B. ADE dik üçgeninden(Şekil 4c);

$$\text{Cotg}(\alpha - \beta) = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{1 + \text{Tan}\,\alpha.\text{Tan}\,\beta}{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}\beta} = \frac{1}{\text{Tan}(\alpha - \beta)}$$

formülü elde edilir.



Şekil 4c

Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada toplam ve fark formüllerinin görsel şekillere dayalı ispatının yapılması ve araştırmacılara tanıtılması amaçlanmıştır. Görsel şekillere dayalı ispat sürecinde yapılan çizimler, öğrencilerin formüllerde yer alan açıları, kenarları vb. görmesini ve anlamlı olarak formülleri öğrenmesini sağlayabilir. Cebirsel olarak yapılan ispat süreci de mantıksal-matematiksel düşünmeye katkı sağlar ve bizleri formüllere götürür. Ancak öğrenciler, formüllerin özünü oluşturan açı, kenar, sinüs, kosinüs vb. ilişkilerini cebirsel ispatta yeterince göremezler. Görsel şekillere dayalı ispatlar formüllerin nasıl oluştuğu ve nereden geldiği konusunda öğrencilere bilgi verirken, ezberden kaçınarak kalıcı öğrenmelerine yardımcı olurlar. Matematik öğretiminde ezberlemenin önüne geçmek için *"neyin nereden geldiğini"* gözler önüne seren görselleştirme çalışmalarına daha fazla yer verilmelidir.

Öğrenciler cebirsel ispat sürecinde matematiksel kuralları yanlış kullanıp yanlış sonuçlara varabilmektedirler. Çünkü ispatın dayandığı görsel şekli, kavramlar arası ilişkileri görememektedirler (Duval, 2002; Arcavi, 2003). Öğrencilerin yaptıkları yanlışların ve anlama zorluklarının önüne geçilmesinde görselleştirmeye dayalı ispat süreçleri etkili olabilir. Ayrıca görsel ispatlar hakkında öğrenci ve öğretmen görüşlerinin alınmasını ya da görsel ispat sürecinde karşılaşılan zorlukları konu alan çalışmalar yapılması da diğer araştırmacılara önerilebilir.

Kaynaklar

Alsina, C. & Nelsen, R.B. (2006). Math Made Visual Creating İmages for Understanding Mathematics. Published and distributed by The Mathematical Association of America.

Arcavi, A. 2003. The role of visual representations in the learning mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215-241(27). www.kent.k12.wa.us/KSD/KR/DIGITAL/math2.pdf.

Bagni, G.T. (1998). Visualization and didactics of mathematics in high school: an experimental reseach. Scientia Paedogogica Experimentalis, 1, 161-180.

Borwein, P. & Jörgenson, L. (1997). Visible structures in number theory. Adresi: http://www.cecm.sfu.ca/loki/papers/numbers/node3.html.

Brown, J., Stillman, G., Schwarz, B. & Kaiser, G. (2008). The case of mathematical proof in lower secondary school: knowledge and competencies if pre-service teachers, proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hrsg.: M.Goos, R. Brown & K. Makar. (C) Merga Inc., 85-91.

Conner, A. (2007). Argumentation in a Geometry Class: Aligned with the Teacher's Conception of Proof,

Delice, A. (2004). Trigonometri Sözel Problemlerinde Görselleştirme ve Diyagram Oluşturma, VI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Marmara Üni., İstanbul.

Delice, A. (2005). Türk ve İngiliz Eğitim sisteminde matematik eğitiminin karşılaştırılması, Milli Eğitim Dergisi, sayı 167. (http://yayim.meb.gov.tr/dergiler/167/index3-delice.htm)

Dufour-Janvier, B. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation, in C. Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: what ways for students, proceedings of 2002 International conference on mathematics, http://www.math.ntnu.edu.tw/cyc/_private/ mathedu/me1/me1_2002_1/duval.doc

Gravina, M.A. (2000) The proof in geometry: essays in a dynamical environment. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/ICME9TG12Contributions/GravinaICME00/GravinaICME00.html

Gravina, M.A. (2008). Dynamical visual proof: what does it mean?, ICME 11- TSG 22, http://tsg.icme11.org/document/get/233.

Guzman, M., 2002. What is visualization in math? In the teaching and learning of mathematical analysis. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf.

Hanna, G and Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and Proving in mathematics education, ZDM Mathematics Education, 40:329-336.

Hanna, G., and Sidoli, N. (2007).Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives, ZDM Mathematics Education , Heidelberg, Vol. 39, page : 73-78.

Karadağ, Z. & McDougall, D. (2009). Visual explorative approaches to learning mathematics, http://www.pmena.org/ 2009/proceedings/workinggroup90649replacement.pdf .

Malaty, G. (2009). The Role of Visualization in Mathematics Education: Can visualization Promote the Causal Thinking?

MEB, (2006). Orta Öğretim Matematik 10. Sınıf Kitabı, Kelebek Matbaacılık, İstanbul.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics Inc.,http://standards.nctm.org/document/chapter7/geom.htm.

Nelsen, R.B. (1993). Proof Without Words, Exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America Press, Washington, DC.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri, V. Uluısal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresi bildirisi, UFBMEK-5/b_kitabi /PDF/Matematik/Bildiri/t245d.pdf

Pettinelli, M. (2008). Visual learning. http://cnx.org/content/m14358/latest/).

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics in A.Gutierrez, P., Borero (eds.) Handbook of Research on Psychology of

Mathematics Education: Past, Present and Future, 205-235. Sense Publishers, Rotterdam /Taipei.

Rahim, M.H., & Siddo, R., (2009). The use of visualization in learning and teaching mathematics. In A. Rogerson (Ed.), Proceedings of the 10th International Conference: Models in Developing Mathematics Education. The Mathematics Education into the 21st Century Project, Dresden, Saxony, Germany, Sept 11-17, 2009. http://math.unipa.it/~grim/21_project/Rahim496-500.pdf

Sarı, M. (2008). Undergraduate students' difficulties with mathematical proof and proof teaching, devam eden doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü. http://yess4.ktu.edu.tr/YermePappers/MeltemSari.pdf

Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. Journal of Mathematical Thinking and Learning, 6 (4). 353-387.

Tall, D., 2004. A versatile theory of visualization and symbolisation in mathematics. Plenary Presentation at the Commission Internationale pour L'Etude et l'Amelioration de l'Ensignement des Mathematiques, Toulouse, France.