

PARAMETRİK FAKTÖRİYEL TASARIM

Tuna Uslu¹

ÖZ

Faktöriyel tasarımlar, basit yapılanmalardan kompleks adapte olan sistemlere (complex adaptive systems) kadar organize olma eyleminin geometrik altyapısının modellenmesinde kullanılabilir. Boole cebirinden yola çıkılarak geliştirilen parametrik altyapı farklı sistemlerin oluşturduğu modellerin ve etkileşimlerin boyutlarını ortaya koymaktadır. Modeller etkenleri basitleştirmek için ikili bir seçime indirilmekte, eğer alternatif olarak üçüncü bir seçenek varsa bu seçenek bir alt seviyede ayrı bir ikili seçim olarak incelenmektedir. Bu yaklaşım 2^N elemanı olan bir modeller kümesi yaratmaktadır. Fakat aslında modeller kümesinin 2^N 'den az elemanı bulunmaktadır. Bu çalışmada bu formüle edilmekte ve model kümesinin daha dar olduğu kanıtlanmaktadır.

Anahtar kelimeler: Boole cebiri, kompleks sistemler, bilişsel bilimler, hesaplamalı dilbilim, parametre hiyerarşisi

GİRİŞ

Mantıksal hesaplama ile beraber değişen dilbilim teorileri 1950'lerden beri matematiksel bir altyapı ile yeni gramer modelleri üretmekte, yeniden şekillenmiştir. Dilbilimde Chomsky ile gelişen sentetik temelli "Minimalist Program" çerçevesinde dil öğrenmenin sınırlı sayıda iki seçenekli parametrenin sonucu olduğu varsayılmaktadır.²

Dilbilimde matematiksel teorilerin gelişimi Chomsky ile şekillenmiş ve bilgisayarların 50'lerden beri kullanım alanını genişletmesiyle beraber mantıksal hesaplamanın gerçek dünya problemlerini, çözebileceği umudu,

¹ Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Enformatik Enstitüsü, Bilişsel Bilimler Bölümü doktora öğrencisi

² Noam CHOMSKY, *The Minimalist Program*. MIT Press, Cambridge MA, 1995.

sosyal bilimler alanından modellemeler ve bunun örnekleri artmıştır.³ Tarif ettiğimiz bu dünyada mantık ve matematik aynı bilimin iki ayrı yönü olarak karşımıza çıkmaktadır.⁴ Mantıksal cebirin temelini Boole'nin kurduğu ikili sistem oluşturur. George Boole 1854'te mantıksal operasyonları kodlamak için sadece iki karakterin kullanılabilceği bir sistem geliştirdi. Mantıksal hesaplama, Boole cebrine göre belirlenen bu ikili sistemi kullanır. Değişkenler $B = \{0, 1\}$ -doğru/yanlış, açık/kapalı... gibi- ikili operatörler ile tanımlanmaktadır.

$$f(x): B_n \rightarrow B$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \in B_n; x_i \in B$$

$B = \{T, F\}$ veya $\{D, Y\}$ ile tanımlanan kümenin Boole fonksiyonu, $F_B(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ fonksiyonunun B^N Boole hiperküpünden B setine tanımlanması ile oluşur.⁵ Boole küpü N sayıda değişken ile yapılan seçimlerin görselleştirilmesi ile açıklanabilir. 3 değişkenin olduğu bir uzayda $N=3 \Rightarrow 2^3=8$ köşe ile tanımlanır.

$$B_1 = \{0, 1\}$$

$$B_2 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$B_3 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

Bu ikili seçim üzerinde şekillenen sistem, 2^N farklı çıktıya sahip bir ağ yapıyı⁶ verir. Yüksek boyutlu haritalar farklı yöntemlerle oluşturulabilir.⁷ Değişkenlik uygun sınırlar ile tanımlandığında değişkenlerin sadece 0 ve 1 değerleri alması sağlanabilir. Bu Boole kısıtları ile mantıksal anlambilim, 0 ve 1'in yanlış ve doğru ile örtüşmesi ile tanımlanabilir. John von Neumann bu ikili sistemi kullanarak bütün enformasyonun programlanabilmesi kavramını geliştirmiştir. Bu sistemde bilgisayarının belleğinde bilgi tutan birim Bİnary diğiT (bit) idi. Bu birim elektronik sinyal var/yok (on/off veya 0/1) değerlerini alabilirdi.

Claude E. Shannon "iletişimin matematiksel teorisi" ile enformasyon teorisinin temelini atmıştır. Kapalı veya izole sistemlerde enformasyon içeriği yok olur veya benzer bir ifadeyle termodinamiğin ikinci yasasına göre entropi azalmaz,

³ D.W. LOVELAND, *Automated Theorem Proving: a Logical Basis*, North Holland, 1978.

⁴ P.L. HAMMER, S. Rudeanu. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*, Springer-Verlag, New York, 1968.

⁵ y.a.g.e.

⁶ bkz. Boolean Network

⁷ Maurice KARNAUGH, *The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits*, Trans. AIEE. part I, 72(9):593-599, November 1953.

sadece artar. Ancak açık sistemler gelişmeyi sürdürür, yani farklı değişkenlerin sürekli sisteme dahil edilmesi gerekir.

1. PARAMETRİK TASARIM

Diller arasındaki farklılıklar bir veya belli sayıda parametrenin var veya yok değeri ile açıklanabilmektedir ve eğer sınırlı sayıda parametre varsa bu aynı zamanda sınırlı sayıda dil modeli, gramer, olduğu anlamına gelir. Bu gramerlerin kümesi ikili alternatifli parametrelerden çeşitli modeller ile hesaplanır.⁸ İki alternatif +/- veya var/yok değerlerini alır. Bu gramerler kümesinin 2^N elemanı olması gerektiği Gibson ve Wexler tarafından parametrelerin birbirini tetikleme üzerine kurdukları açıklamada belirtilmiştir.

2. PARAMETRELER ARASINDAKİ HİYERARŞİK İLİŞKİLER

Parametreler arasında hiyerarşik bir alt-üst ilişkisi varsa parametreler farklı seviyelerde bulunur. Seviyelerdeki farklılık i ile tanımlanır ve parametreler için basit seviye 1'dir. Farklı seviyelere sahip parametrelerin bulunduğu tasarımda bulunan model sayısı (1) ile hesaplanabilir.

$$i = \{ 1, \dots, j \}$$
$$U = \prod_{i=1}^j (i+1)^{N_i - N_{i+1}} \quad (1)$$

Formülde i değeri parametrenin bulunduğu seviyeyi belirtir, alt parametresi bulunmayan bir modelde bütün parametreler aynı düzeyde olduğu için 1 değerini alır; farklı değişkenlerin, faktörlerin aynı seviyede bulunduğunu belirtir. Burada "seviye" ile kastedilen bir parametrenin aldığı değerler (0 veya 1, artı veya eksi gibi) değil, diğer parametreler ile olan ilişkisidir. Her alt parametre bu formülde en fazla bir alt parametreye sahip olabilir. Örneğin bir parametre ancak bir başka parametrenin direkt alt özelliği olarak ortaya çıkıyorsa bu formülde bir alt parametre olarak değerlendirilir ve i bir üst değeri alır; parametrenin i değeri 1 ise alt parametrenin i değeri 2 olur. Benzer şekilde her alt parametre bir üst parametreden +1 üst seviye değerini alır.

Baker'in tasarladığı parametre hiyerarşisi çocukların ilk dillerini öğrenme sürecinde mantıksal bir akış şeması kullandıklarını belirtmektedir.⁹ Böylece parametre değerleri için gereksiz karar verme aşamalarından kaçınılmış olmaktadır.¹⁰ Karar verme süreci her olasılığı modele dahil etmemekte, birbiriyle

⁸ E. M. GOLD, *Language identification in the limit*. Information and Control (now Information and Computation), 10, s. 447-474, 1967.

⁹ Mark C. BAKER, *The Atoms of Language: The mind's hidden rules of grammar*. New York: Basic Books, 2001, s. 195

¹⁰ y.a.g.e. s. 192

bağlantısı olan parametreleri alt-üst seviye ilişkisiyle birbirlerine bağlayarak farklı modellerin olasılığını azaltmaktadır. Baker'in şemasından bir örnek vermek gerekirse "optional polysynthesis" denilen bir parametre "polysynthesis" parametresinin olmadığı (0 değerini aldığı) alternatifin altında; bir alt seviyede yer alır ve bu durumda i bu parametre için 2 olur.

Örnek

Birbirleriyle etkileşimleri olmayan parametreler için tasarımın 10 parametresinin bulunduğunu düşünürsek bu tasarımın boyutları 2^{10} iken, diğer taraftan modelde toplam 10 parametre fakat içlerinde ikinci seviyeden bir alt parametre varsa, yani bir parametre bir diğerinin alt parametresi ise;

$$U = (i+1)^{N_i - N_{i+1}} \cdot ((i+1) + 1)^{N_{(i+1)} - N_{(i+1)+1}} \dots$$

$$U = (1+1)^{9-1} \cdot (2+1)^{1-0} = 2^8 \cdot 3^1 = 256 \cdot 3 = 768$$

$$\Rightarrow 768 < 2^{10} = 1024$$

Bu örnekte olduğu gibi $i = \{1 \dots j-1, j\}$ ve $j \neq 1$ olduğu durumlarda;

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^j (i+1)^{N_i - N_{i+1}} < 2^N$$

Bu tasarımda birinci seviyeden 9, ikinci seviyeden 1 parametre bulunmaktadır ve toplam model sayısı 768'dir. Diğer taraftan aynı seviyede olan 10 parametre için farklı model sayısı $2^{10} = 1024$ olarak hesaplanır. İnsan dilleri için 30 parametre olduğu varsayılır ve bunlardan bazıları arasında seviye ve tetikleme ilişkisi olduğu düşünülürse olası ve mümkün gramer sayısının 2^{30} 'dan az olması gerekir. Baker'in teorisindeki bulunan imkansız diller de bu varsayımı destekler niteliktedir.¹¹ Parametreler arasındaki alt-üst ilişkisi, olasılığı da değiştirmekte; modellerin rastsal olarak bulunabilme olasılığını artırmaktadır. Rastsal olarak bir doğru parametrenin seçilebilme olasılığı (2)'de görülmektedir.

$$P(U_T) = 1 / \text{Model sayısı} = 1 / \left[\prod_{i=1}^j (i+1)^{N_i - N_{i+1}} \right] \quad (2)$$

¹¹ y.a.g.e.

Olasılığın paydası 2^N 'den küçük olacağı için olasılık $1/2^N$ 'den büyük olacaktır. Parametre hiyerarşisinde mümkün olmayan modeller ve olası olmayan modeller nedeniyle insan dillerinin gramer kümesinin eleman sayısı 2^{30} 'dan azdır.

Aynı seviyede N faktörün/parametrenin bulunduğu tasarımın boyutları $U=2^N$ ile ifade edilir. Ancak alt parametrelerin olduğu tasarımlarda model sayısı 2^N 'den az olmalıdır, parametrenin (+) değeri bir alt parametreyi tetiklerken, (-) değeri aynı etkiyi göstermez. Bunun tam tersi de söz konusu olabilir; (-) değer bir alt özelliğe sahiptir.¹² Bu durum farklı seviyelerde bulunan parametreler, ağ yapılar ve tasarımlar için geçerli olabilir.

3. PARAMETRELERDEN OLUŞAN MODELLER KÜMESİ UZAYININ BOYUTLARI

İkili seçimlerden oluşan parametrelerin hiyerarşik formasyonu Boole ağı olan model uzayını $U = 2^N$ 'den

$$U = \prod_{i=1}^j (i+1)^{N_i - N_{i+1}}$$

$$i = \{1 \dots j-1, j\}$$

şekline çevirecektir ve bu formasyon model uzayının boyutlarını küçültecektir.

SONUÇ

İmkansız ve uygun olmayan parametrik modellerden dolayı formülden çıkacak model sayısı 2^N 'den küçük olacaktır, dilbilimden bu durumu örnelemeye kalkarsak bu aynı zamanda mümkün olan insan dilleri için eğer 30 tane parametre varsa bu dillerin kümesinin 2^{30} 'dan az olduğu anlamına gelmektedir.

KAYNAKÇA

BAKER, Mark C. *The Atoms of Language: The mind's hidden rules of grammar*. New York: Basic Books, 2001

BOOLE, George. *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability*, Macmillan, 1854.

CHOMSKY, Noam. *Lectures on Government and Binding*. Dordrecht: Foris Publications, 1981.

¹² y.a.g.e.

- CHOMSKY, Noam. *Language and Problems of Knowledge: The Managua Lectures*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1988
- CHOMSKY, Noam. *The Minimalist Program* MIT Press, Cambridge MA, 1995.
- CLAHSEN, H. *Spracherwerb in der Kindheit: eine Untersuchung zur Entwicklung der Syntax bei Kleinkindern*. Tübingen: Gunter Narr, 1982.
- CUMMINS, Robert. *Functional Analysis*, *Journal of Philosophy*, Vol. LXXII, No. 22, 1975.
- CUMMINS, Robert. *The Nature of Psychological Explanation*. Cambridge, MA: Bradford/MIT Press, 1983.
- FOWLER, B. 'Hard-Wired' Grammar Rules Found for All Languages, *New York Times*, January 15 2002.
- FREGE, Gottlob. *Foundations of Arithmetic*, 1884.
- GOLD, E. M. *Language identification in the limit*. *Information and Control* (now *Information and Computation*), 10, s. 447-474, 1967.
- HAMMER, P.L., S. Rudeanu. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*, Springer-Verlag, New York, 1968.
- KARNAUGH, Maurice. *The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits*, *Trans. AIEE*. part I, 72(9):593-599, November 1953.
- KRASHEN, S. D. *The Input Hypothesis: issues and implications*. London: Longman, 1985.
- LOVELAND, D.W. *Automated Theorem Proving: a Logical Basis*, North Holland, 1978.
- MILLIKAN, R. In Defense of Proper Functions, *Philosophy of Science* 56, 1989
- NEANDER, K. Functions as selected effects: The conceptual analyst's defence. *Philosophy of Science*, 58, 168-84, 1991.
- SAKAS, W.G. and Fodor, J.D. The Structural Triggers Learner. in S. Bertolo (ed.) *Language Acquisition and Learnability*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- WINOGRAD, *Language as a Cognitive Process*, 2001