Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Sayı 26 Nisan 2010

Gamma ve Erlan Dağılımlarının Birikimli Fonksiyonlarının Elde Edilmesinde Pratik Bir Gösterim

Yalçın Karagöz*

ÖZET: Bu çalışmada; ispatlanması, iyi derecede matematik bilgisi gerektiren Gamma ve Erlang dağılımlarının birikimli fonksiyonları için, pratik bir yöntem sunulacaktır.
Anahtar Kelimeler: Gamma Dağılımı, Erlang Dağılımı, Gamma ve Erlang Dağılımlarının Birikimli Fonksiyonları.

ABSTRACT: In this study, a practical method is presented to prove the Cumulative Functions of Gamma and Erlang Distributions requiring certain mathematical information.
Keywords: Gamma Distribution, Erlang Distributions, Cumulative Function of Gamma and Erlang Distributions

GİRİŞ

X rassal değişkenin parametreleri $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , \quad x > 0 \ \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonuna, gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Burada α şekil ve β skala parametresidir(Ali 1998: 223; Buck 1990: 85). Gamma dağılımının birikimli fonksiyonu

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - \int_{t=x}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}.e^{-1/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} dt \quad , \quad x > 0 \ \text{ için}$$

biçiminde yazılır. Burada $y = \dfrac{t}{\beta} \ \Rightarrow \ t = \beta y \ \Rightarrow \ dt = \beta dy$ dönüşümü yapılarak,

$$F(x) = 1 - \int_{t=x}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}.e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} dt = 1 - \int_{\beta y}^{\infty} \frac{(\beta y)^{\alpha-1}.e^{-\beta y/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \beta dy = 1 - \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_{\beta y}^{\infty} y^{\alpha-1}.e^{-y} dy$$

$$= 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta y}^{\infty} y^{\alpha-1}.e^{-y} dy = 1 - \int_{\beta y}^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}.e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy$$

elde edilir. $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan (Port 1994 444),

$$F(x) = 1 - \int_{y\beta}^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}.e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{y\beta}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

yazılır. Burada kısmi integral uygulamak için $u = y^{\alpha-1}$ ifadesinin $\alpha - 1$ defa türevi ve $dv = e^{-y} dy$ ifadesinin de $\alpha - 1$ defa integrali alınarak,

$$+u = y^{\alpha-1} \quad \text{...} \quad dv = e^{-y} dy$$

---

* Yrd. Doç. Dr. Cumhuriyet Üniversitesi İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü İstatistik Anabilimdalı

$$-u' = (\alpha-1)y^{\alpha-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad -e^{-y}$$
$$+u'' = (\alpha-1)(\alpha-2)y^{\alpha-3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{-y}$$
$$-u''' = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)y^{\alpha-4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad -e^{-y}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$-u^{(\alpha-1)} = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ \ldots\ [\alpha-(\alpha-1)]y^{0} \quad \ldots\ldots \quad -e^{-y}$$
$$+u^{\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{-y}$$

elde edilir. u tarafındaki her eleman, kendi satırının karşısında bulunan ifadenin integrali ile çarpılarak,

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_{y\beta}^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

$$= 1 + \frac{e^{-y}}{(\alpha-1)!}\Big\{y^{\alpha-1} + (\alpha-1)y^{\alpha-2} + (\alpha-1)(\alpha-2)y^{\alpha-3}$$
$$+ (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\,y^{\alpha-4} + \ldots + (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ \ldots\ [\alpha-(\alpha-1)]y^{0}\Big\}\Big|_{y\beta}^{\infty}$$

$$= 1 + \frac{e^{-y}}{(\alpha-1)!}\left\{\frac{y^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{(\alpha-1)y^{\alpha-2}}{(\alpha-1)!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)y^{\alpha-3}}{(\alpha-1)!}\right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\,y^{\alpha-4}}{(\alpha-1)!} + \ldots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ \ldots\ [\alpha-(\alpha-1)]y^{0}}{(\alpha-1)!}\right\}\Big|_{y\beta}^{\infty}$$

$$= 1 + e^{-y}\left(\frac{y^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{y^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \frac{y^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!} + \frac{y^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!} + \ldots + 1\right)\Big|_{y\beta}^{\infty}$$

bulunur. ∞ için e^{-y}'nin değeri sıfır olacaktır. $y\beta$ değeri yerine yazılırsa

$$F(x) = 1\left[0 - e^{-y\beta}\left(\frac{(y\beta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{(y\beta)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \frac{(y\beta)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!} + \frac{(y\beta)^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!} + \ldots + \frac{y^{0}}{0!}\right)\right]$$

$$F(x) = -e^{-y\beta}\left(\frac{(y\beta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{(y\beta)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \frac{(y\beta)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!} + \frac{(y\beta)^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!} + \ldots + \frac{y^{0}}{0!}\right)$$

$$F(x) = -e^{-y\beta}\left(\frac{(y\beta)^{\alpha-1}}{\underbrace{(\alpha-1)!}_{k=\alpha-1\text{ için}}} + \frac{(y\beta)^{\alpha-2}}{\underbrace{(\alpha-2)!}_{k=\alpha-2\text{ için}}} + \frac{(y\beta)^{\alpha-3}}{\underbrace{(\alpha-3)!}_{k=\alpha-3\text{ için}}} + \frac{(y\beta)^{\alpha-4}}{\underbrace{(\alpha-4)!}_{k=\alpha-4\text{ için}}} + \ldots + \frac{y^{0}}{\underbrace{0!}_{k=0\text{ için}}}\right)$$

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-y\beta}(y\beta)^{k}}{k!}$$

elde edilir. **Erlang dağılımı;** Gamma dağılımınının özel bir halidir. $\alpha > 0$ ve tamsayı olduğunda Gamma dağılımı, Erlang dağılımı haline gelir (Hasting-Peacock 1975 54). X rassal değişkeninin parametreleri $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve α tamsayı olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , \quad x > 0 \ \text{için} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonuna, Erlang dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Burada α şekil, β skala parametresidir. Erlang dağılımının birikimli fonksiyonu

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - \int_{t=x}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}.e^{-1/\beta}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} dt \quad , \quad x > 0 \ \text{için}$$

biçiminde yazılır ve $y = \dfrac{t}{\beta} \Rightarrow t = \beta y \Rightarrow dt = \beta dy$ dönüşümü yapılarak,

$$F(x) = 1 - \int_{t=x}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}.e^{-t/\beta}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} dt = 1 - \int_{\beta y}^{\infty} \frac{(\beta y)^{\alpha-1}.e^{-\beta y/\beta}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} \beta dy$$

$$= 1 - \frac{\beta^{\alpha}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} \int_{\beta y}^{\infty} y^{\alpha-1}.e^{-y} dy = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\beta y}^{\infty} y^{\alpha-1}.e^{-y} dy$$

$$= 1 - \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\beta y}^{\infty} y^{\alpha-1}.e^{-y} dy$$

elde edilir. Burada kısmi integral uygulamak için, $u = y^{\alpha-1}$ ifadesinin $\alpha - 1$ defa türevi ve $dv = e^{-y}dy$ ifadesinin de $\alpha - 1$ defa integrali alınarak,

$$\begin{array}{ll} +u = y^{\alpha-1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & dv = e^{-y}dy \\ -u' = (\alpha-1)y^{\alpha-2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -e^{-y} \\ +u'' = (\alpha-1)(\alpha-2)y^{\alpha-3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots & e^{-y} \\ -u''' = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)y^{\alpha-4} \ \ldots\ldots\ldots & -e^{-y} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -u^{(\alpha-1)} = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) \ \ldots \ [\alpha-(\alpha-1)]y^{0} \ \ldots\ldots & -e^{-y} \\ +u^{\alpha} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & e^{-y} \end{array}$$

elde edilir. u tarafındaki her eleman, kendi satırının karşısında bulunan ifadenin integrali ile çarpılarak,

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{y\beta}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= 1 + \frac{e^{-y}}{(\alpha-1)!} \{ y^{\alpha-1} + (\alpha-1)y^{\alpha-2} + (\alpha-1)(\alpha-2)y^{\alpha-3}$$

$$+(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\,y^{\alpha-4}+\ ...\ +(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ ...\ [\alpha-(\alpha-1)]y^{0}\Big\}\Big|_{y\beta}^{\infty}$$

$$=1+\frac{e^{-y}}{(\alpha-1)!}\left\{\frac{y^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}+\frac{(\alpha-1)y^{\alpha-2}}{(\alpha-1)!}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)y^{\alpha-3}}{(\alpha-1)!}\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\,y^{\alpha-4}}{(\alpha-1)!}+\ ...\ +\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ ...\ [\alpha-(\alpha-1)]y^{0}}{(\alpha-1)!}\right\}\Bigg|_{y\beta}^{\infty}$$

$$=1+e^{-y}\left(\frac{y^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}+\frac{y^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}+\frac{y^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!}+\frac{y^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!}+\ ...\ +1\right)\Bigg|_{y\beta}^{\infty}$$

bulunur. ∞ için e^{-y}'nin değeri sıfır olacaktır. $y\beta$ değeri yerine yazılırsa

$$F(x)=1\left[0-e^{-y\beta}\left(\frac{(y\beta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}+\frac{(y\beta)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}+\frac{(y\beta)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!}+\frac{(y\beta)^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!}+\ ...\ +\frac{y^{0}}{0!}\right)\right]$$

$$F(x)=-e^{-y\beta}\left(\frac{(y\beta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}+\frac{(y\beta)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}+\frac{(y\beta)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!}+\frac{(y\beta)^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!}+\ ...\ +\frac{y^{0}}{0!}\right)$$

$$F(x)=-e^{-y\beta}\left(\underbrace{\frac{(y\beta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}}_{k=\alpha-1\text{ için}}+\underbrace{\frac{(y\beta)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}}_{k=\alpha-2\text{ için}}+\underbrace{\frac{(y\beta)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!}}_{k=\alpha-3\text{ için}}+\underbrace{\frac{(y\beta)^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!}}_{k=\alpha-4\text{ için}}+\ ...\ +\frac{y^{0}}{\underbrace{0!}_{k=0\text{ için}}}\right)$$

$$F(x)=1-\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-y\beta}(y\beta)^{k}}{k!}$$

elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada; Gamma ve Erlang dağılımlarının birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonları, pratik bir yöntemle elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

ALI, Mukhtar M., “Probability Models On Horse-Race Outcames,” **Journal of Applied Statistics**, 1998, Vol. 25, No.2. ss.223.

BUCK, James R. and Tzvı Raz, “Development and Application of Parameter Maps,” **Computers and Industrial Engineerig**, 1990, Vol. 18, No.1. ss.85.

HASTING N.A.J. and J.B. Peacock, **Statistical Distributions**, Butterworth Group, london,

PORT, Sidney C., **Theoretical Probability for Applications**, John Wiley and Sons, İnc., New York, 1994.