

Determination of Mathematics Department Students' Perceptions about Proving through Metaphors¹

Meral Cansız Aktaş² and Devrim Yaşar Aktaş³

¹Ordu University, Faculty of Education, Turkey; ³Ordu Fatih Anatolian High School, Turkey

ARTICLE INFO

Article History:

Received 07.04.2013

Received in revised form
26.09.2013

Accepted 31.10.2013

Available online

15.12.2013

ABSTRACT

Proof is at the heart of the mathematics and also it is an essential tool for promoting mathematical understanding. Previous studies show that students often have difficulty in the proving process and they don't enjoy the activities involving proving. Hence, the aim of present study is to determine students' perceptions about proving through metaphors at the university level. For this purpose, the study was conducted with 96 undergraduate students from mathematics department of a state university in Turkey. The findings of the study show that source and reason of the metaphors which were used by the students were mostly about the clarification function of proving. The results of the study are discussed and compared with the literature, and suggestions have been made for new studies in this direction.

© 2013 IOJES. All rights reserved

Keywords:

Mathematical proof, metaphors, mathematics department students, perception, phenomenology

Extended Summary

Purpose and Significance

Proof is at the heart of the mathematics and also it is an essential tool for promoting mathematical understanding (Ball et. al., 2002). Besides having an essential role for the improvement of mathematical thinking, proving is also of vital importance to grasp the nature of mathematical knowledge and its historical development. Additionally, proving is a fundamental aspect of mathematical objects in terms of understanding types of mathematical objects, their development paths and the ways in which mathematical objects are shared among communities (Uğurel and Morali, 2010). Although proving presents a key position in mathematics, it falls out of favor with students. Students hold such a pessimistic perspective towards proving that they believe they will never be successful. In fact, the success rate for proving among students is not too high (Albayrak-Bahtiyari, 2010; Almeida, 2003; Arslan and Yıldız, 2010; Aydoğdu, Olkun and Toluk, 2003; Güler, Özdemir and Dikici, 2012; Jones, 2000; Raman, 2003; Weber, 2005). Recently, broader perspectives have been brought to the existing problems with the help of the metaphors in the scientific researches. In addition to these studies, possible analyzes about these problems are being enlightened by revealing the concept schemes in the minds of individuals. There are also many studies about the perceptions about mathematics (Güler, Akgün, Öçal and Doruk, 2012; Güveli, İpek, Atasoy and Güveli, 2011; Kılıç and Yelken-Yalpar, 2013; Oflaz, 2011; Şengül and Katrançı, 2012). However, when these studies are examined, it is seen that the studies which examines the perceptions towards proving are not common. This is an important aspect of this research which we believe, will contribute to fill a gap in the literature. The

¹This study has been presented at the "11th Mathematics Symposium" in Samsun, September 19-21st, 2012.

²Corresponding author's address: Ordu University, Faculty of Education, Department of Primary Education, Ordu, Turkey

Telephone: +90 452 226 52 50

Fax: +90 452 226 52 46

e-mail: meralcaktas@odu.edu.tr

purpose of this study is to find out student perceptions about proving through metaphors. In this context, the answers for the questions of “*what are the students’ metaphors about proving*” and “*in which conceptual categories can these metaphors be collected in terms of common features*” was investigated.

Method

In this research; one of the qualitative research method phenomenology was used. The data analysis process was carried out by content analysis technique. Participants of the study included 96 (47 female and 49 male) students were enrolled in a state university in Turkey in 2011-2012 academic year. The data of the research has been acquired through completing the following sentence for each student; “*Proving is like/ similar to, because*”. The expression “like” in this sentence clearly aims to reveal the link between the source and subject of the metaphor. On the other hand “because” expression in this sentence aims to provide reason or logical basis for metaphors produced by the participants. For the validity of this study, data analysis process was elaborated and conceptual categories were explicated with citations. On the other hand, in order to test reliability in the analysis, data were examined by another researcher dealing with qualitative research. Inter-rater reliability was calculated using Miles and Huberman’s (1994) formula and it was found to be 86%.

Results

In data analysis process it was determined that 51 valid metaphors had been produced by students and those yielded metaphors were classified into ten conceptual categories. These were “proving for making something clear” (23%) , “proving as a difficult and complex operation”(14.8%), “proving as an operation requires patience, occupation, attention and care” (13.1%), “proving as an operation which goes from parts to the whole with right attacks” (11.5%), “proving as an operation which makes you feel good when accomplished” (9.8%) , “proving as an operation which has a procedure” (6.6%), “proving as an operation which requires interpreting knowledge” (6.6%), “proving as an operation which requires accuracy” (6.6%), “proving as an operation which requires memorization” (4.9%) and “proving as an interdisciplinary operation” (3.3%).

Discussion

The findings of this study showed that the metaphors created by the students in the first five categories were much more frequent. The data for these five categories show that the students used the metaphors related to first category mostly. The source and reason of the metaphors used in the first category were related more to the clarification and affirmation function of proving. So mathematical proof means to clarification of indistinct situations and make it clear for most of the students. Several studies (Güler, Özdemir and Dikici, 2012; Hanna, 2000; Hanna and Jahnke, 1999; Uğurel, 2010; Varghese, 2009) have similar findings. The metaphors in the second category emphasize that mathematical proof is a difficult process including complicated stages. The studies conducted before (Almeida, 2000; Dreyfus, 1999; Harel and Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994; Recio and Godino, 2001; Sarı, Altun and Aşkar, 2007; Stylianides, Stylianides and Philippou, 2007; Weber, 2001; Weber, 2004) have similar findings. The metaphors of the third category stated that proving requires patience, occupation, attention and care similar to the result of the Nyaumwe and Buzuzi (2007). When looking at the metaphors of the fourth category, they define mathematical proof as going from part to the whole with right attacks. The studies of Zhou and Bao (2009) and Morrow (2004) have parallel results. On the other hand the metaphors in the fifth category are related to the contentment that is experienced when proving process is successful. The results of this study related to the metaphors of other categories are in line with the results of several studies (Condradie and Firth, 2000; Köğçe, 2012; Moore, 1994; Nyaumwe and Buzuzi, 2007; Sarı, Altun and Aşkar, 2007).

Conclusion

It was seen that student perceptions about mathematical proof mostly refer to the clarification function of the proof. Student reasons for why they used subject metaphors reflect their ideas about the importance of mathematical proof. The findings obtained from the study show also that students see mathematical proof as a difficult and complicated process. In that sense, students may take courses to comprehend pure and axiomatic structure of mathematics so that they can apprehend mathematical proof better. These courses may also be supportive for fresh university students to overcome their high school mathematical habits. The

literature review of the study shows that there are a few studies about what the mathematical proof means for students and what are the student feelings and beliefs towards mathematical proof. New studies observing the points which the students have difficulties and negative attitudes in the process of proving, will contribute to the solutions of these negative situations. It's proposed to plan mathematical applications which will lead students to participate more in mathematical proof processes. Considering the results of the studies that demonstrate students' contentment after accomplishing mathematical proof, there is a growing need for the further studies that investigate the motivation increasing mathematical applications. In this way, the students may be prevented from memorizing in proof processes.

Matematik Bölümü Öğrencilerinin İspat Yapma ile ilgili Algılarının Metaforlar Yoluyla Belirlenmesi¹

Meral Cansız Aktaş² ve Devrim Yaşar Aktaş³

²Ordu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü, Türkiye; ³Ordu Fatih Anadolu Lisesi, Türkiye

MAKALE BİLGİ

Makale Tarihi:
Alındı07.04.2013
Düzeltilmiş hali
alındı26.09.2013
Kabul edildi31.10.2013
Çevrimiçi yayımlandı
15.12.2013

ÖZ

İspat matematiğin temeli ve aynı zamanda matematiksel anlamayı ilerletmek için gerekli olan bir araçtır. Yapılan çalışmalar öğrencilerin ispat süreçlerinde genellikle zorluk yaşadıklarını ve ispat yapmayı sevmediklerini göstermektedir. Buradan hareketle bu çalışmanın amacı öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarını metaforlar yoluyla belirlemektir. Bu amaçla bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 96 matematik bölümü öğrencisi ile çalışılmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre öğrenciler tarafından en fazla kullanılan metaforların kaynaklarının ve gerekçelerinin, ispat yapmanın açıklığa kavuşturma fonksiyonunu işaret eden nitelikte olduğu görülmüştür. Çalışma sonuçları ilgili literatür ile karşılaştırılarak tartışılmış ve bu doğrultuda yeni çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

© 2013 IOJES. Tüm hakları saklıdır

Anahtar Kelimeler:

Matematiksel ispat, metaforlar, matematik bölümü öğrencileri, algı, olgu bilim

Giriş

İspat matematiğin temeli ve aynı zamanda matematiksel anlamayı ilerletmek için gerekli olan bir araçtır (Ball vd., 2002). Matematiksel bilginin yapısını, doğasını, tarihsel gelişimini kavramada, matematiksel nesnelerin türlerini, geliştirilme yollarını, bireyler ve toplumlarca ne şekilde paylaşıldığını algılamada merkezi bir öneme sahip olan ispat ve ispatlama matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde ve matematik yapmada kilit rol oynamaktadır (Uğurel ve Morali, 2010).

İspatlar bir iddia hakkındaki şüphelerin giderilmesinde kullanılmakta (Harel ve Sowder, 2007; Harel, 2008) ve düşünmeye dayalı bir süreç olarak matematiği matematik yapan önemli bir bölümü ve hatta matematiğin temelinin oluşturmaktadır (Mingus ve Grassl, 1999). Davis ve Hersh (2002, s.174) ispat yapmanın ne denli önemli olduğunu şöyle açıklamaktadır: "Bazılarına göre, matematik oyununun adı ispattır; ispat yoksa matematik de yoktur". Ayrıca ispat sürecinin karşılaşılan problemlerin çözümü için ihtiyaç duyulan matematiksel bilgileri ilişkilendirme, strateji geliştirme ve bir araç olarak kullanılabilme gibi özelliklere sahip olduğu belirtilmektedir (Hanna ve Barbeau, 2008; Mariotti ve Balacheff, 2008). Ancak ilköğretimden yüksek öğretime her aşamada, ispat yapma öğrencilerin başarılı olamadıkları ve başarılı olamayacaklarına inandıkları, genellikle sevilmeyen bir süreç olarak görülmektedir (Albayrak-Bahtiyari, 2010; Almeida, 2003; Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Jones, 2000; Raman, 2003; Weber, 2005). Örneğin Albayrak-Bahtiyari (2010), sekizinci sınıf öğrencilerinin ispatın anlamından, gerekliliğinden, matematiksel gelişimleri açısından öneminden emin olmadıklarını ve ispat ile muhakeme açısından yeterli deneyime sahip olmadıklarını belirtmektedir. Liselerde varsayımda bulunma ve ispatlama gibi becerilere yeterince önem verilmemesi gibi nedenlerle öğrenciler, lisans eğitiminde üzerinde durulmasına rağmen, yüksek matematik derslerinde ispat yapmada güçlük çekmekte ve arzu edilen düzeyde başarılı olamamaktadırlar (Arslan ve Yıldız, 2010; Dreyfus, 1999; Jones, 2000; Morali vd., 2006; Özer ve Arıkan, 2002; Recio ve Godino, 2001; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Weber, 2001).

¹Bu çalışma 19-21 Eylül 2012 tarihleri arasında Samsun'da düzenlenen 11. Matematik Sempozyumunda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

²Sorumlu yazarın adresi: Ordu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Ordu, Türkiye

Telefon: 0 452 226 52 50

Faks: 0 452 226 52 46

e-posta: meralcaktas@odu.edu.tr

İspat sürecinde yaşanan güçlükler, ispat yapmanın öğrenciler tarafından nasıl algılandığı sorusunu akla gelmektedir. Burada soyut yapı ve kavramların daha kolay açıklanmasını ve daha somut bir yapıda sunulmasını kolaylaştıracak araçlara ihtiyaç duyulmaktadır. Pratte (1981), metaforların bu süreçte yaygın olarak kullanıldığını belirtmektedir. Metafor, Latince ve eski Yunancada *öte*, *aşırı* anlamına gelen *meta* ile *taşımak*, *yüklenmek* anlamına gelen *pherein* sözcüklerinin birleşiminden türetilmiştir (Öztürk, 2007). Kişilerin kavramsal bir olguyu anlama ve açıklamada kullanabileceği bir zihinsel araç olarak görülen metaforlar, herhangi bir kavram ile ilgili mevcut zihinsel şemaları ortaya çıkarma yoluyla kavramın belli bir yönünün aydınlatılmasına olanak sağlamaktadır (Saban, Koçbeker ve Saban, 2006).

İnsanın fiziksel ve sosyal gerçekliği kavrayış biçiminin metaforik olduğuna ilişkin ortaya atılan görüşler konuya yönelik akademik ilginin artmasına sebep olmuştur (Özdemir, 2012). Bu nedenle son yıllarda yapılan bilimsel çalışmalarda metaforlar kullanılarak, mevcut problemlere geniş bakış açıları kazandırılmakta, kavramlarla ilgili bireylerin zihinlerinde yer alan şemalar ortaya çıkarılarak mevcut durumlar ya da sorunlar hakkında yapılabilecek analizlere ışık tutulmaktadır. (Öztürk, 2007). Eğitim alanında ise kişilerin zihinlerindeki kavram izlerini, kavramla ilgili olmayan başka kelimelerle benzetim yoluyla ifade etmek için metaforlarla ilgili araştırmalar yapılmaktadır (Güler, Akgün, Öçal ve Doruk, 2012). Arslan ve Bayrakçı (2006) bu alanda yapılan çalışmalarda artış, metaforların bireylerin dünyalarını anlamlandırma ve yapılandırılmalarına yönelik güçlü bir zihinsel haritalama ve modelleme aracı olmalarına bağlamaktadır. Yapılan inceleme sonucunda bu çalışmalarda daha çok öğrenci, öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrenme-öğretme (Alger, 2009; Massengill ve Mahlios, 2008; Saban, Koçbeker ve Saban, 2007; Thomas ve Beauchamp, 2011), okul (Aydoğdu, 2008, Nalçacı ve Bektaş, 2012; Özdemir, 2012), öğrenci (Saban, 2009), bilgi (Saban, 2008), öğretmen (Cerit, 2008a; Ocak ve Gündüz, 2006; Pektaş ve Kıldan, 2009; Saban, 2004; Saban, Koçbeker ve Saban, 2006), müdür (Cerit, 2008b), değerlendirme (Tatar ve Murat, 2011) vb. kavramlar ile ilgili algılarının araştırıldığı anlaşılmıştır. Özel olarak matematik eğitimi açısından bakıldığında ise sınıf öğretmeni adayların matematik kavramına (Güveli, İpek, Atasoy ve Güveli, 2011; Kılıç ve Yelken-Yalpar, 2013), ilköğretim öğrencilerinin matematik (Şengül ve Katrancı, 2012), matematik ve matematik öğretmeni kavramlarına (Oflaz, 2011), ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik kavramına (Güler, Akgün, Öçal ve Doruk, 2012), lise öğrencilerinin problem çözmeye (Yee, 2012) ilişkin algılarının yine metaforlar yoluyla araştırıldığı görülmektedir. Açıkça anlaşıldığı üzere öğretmen, öğrenci, okul vb. kavramlara ilişkin algıların incelendiği birçok ulusal ve uluslararası çalışma bulunmasına rağmen matematikte büyük öneme sahip olan ispat yapma ile ilgili algıların incelendiği herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu yönüyle bu araştırmanın literatürdeki bu boşluğu doldurmaya önemli bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmanın amacı, öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarını metaforlar yoluyla belirlemektir. Bu bağlamda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Öğrencilerinin ispat yapmaya ilişkin ürettikleri metaforlar nelerdir?
2. Bu metaforlar ortak özellikleri bakımından hangi kavramsal kategoriler altında toplanabilir?

Yöntem

Bu çalışmada, nitel araştırma desenlerinden araştırmanın doğasına uygun olan olgu bilim (fenomenoloji) deseni kullanılmıştır. Olgu bilim (fenomenoloji) deseni, farkında olduğumuz ancak derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olmadığımız olgulara odaklanan bir araştırma desendir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Katılımcılar

Araştırma 2011-2012 öğretim yılında bir devlet üniversitesinin matematik bölümünde öğrenim gören 96 öğrencinin katılımıyla yürütülmüştür. Katılımcılar söz konusu devlet üniversitesinin matematik bölümündeki tüm öğrenciler arasından gönüllülük esasına göre belirlenmiştir. Araştırma probleminin daha geniş bir çerçevede ele alınması için katılımcıların her sınıf düzeyinden alınması yoluna gidilmiştir. Araştırmaya 47 kız (K), 49 erkek (E) öğrenci katılmıştır. Bu öğrencilerin 28 tanesi birinci sınıf, 21 tanesi ikinci sınıf, 20 tanesi üçüncü sınıf ve 27 tanesi dördüncü sınıf öğrencisidir.

Verilerin Toplanması

Araştırmada öğrencilerin ispat yapma ile ilgili sahip oldukları zihinsel imgeleri ortaya çıkarmak amacıyla onlardan “ispat yapmak gibidir, çünkü” cümlesini yazılı olarak tamamlamaları istenmiştir. Bu ifadede “gibi” ifadesine metaforun konusu ile kaynağı arasındaki bağı net bir şekilde ortaya çıkarmak, “çünkü” ifadesine ise katılımcıların ürettikleri metaforlar için gerekçe veya mantıksal dayanak sunmalarını sağlamak amacıyla yer verilmiştir.

Verilerin Analiz Edilmesi ve Yorumlanması

Çalışmada veri analizi süreci “içerik analizi” çerçevesinde yürütülmüştür. İçerik analizi, elde edilen ham verilerin anlamlandırılarak belirli bir çerçeve oluşturulması ve beliren durum netlik kazandıktan sonra kod ve kategorilerin ortaya çıkararak somutlaşmasını sağlamaktadır (Patton, 2002). Araştırma sonucu elde edilen verilerin analiz edilmesi amacıyla Saban (2008) tarafından belirtilen aşağıdaki aşamalar izlenmiştir:

Birinci aşama (Adlandırma aşaması). Bu aşamada öğrenciler tarafından üretilen metaforlar belirgin bir şekilde belirtilip belirtilmediğine bakılarak listelenmiştir.

İkinci aşama (Eleme ve arıtma aşaması). Bu aşamada bir önceki aşamada belirlenen metaforlar; (1) metaforun imgesi, (2) metaforun kaynağı ve (3) metaforun konusu ile kaynağı arasındaki ilişki bakımından tekrar gözden geçirilmiştir. Bu süreçte 35 kağıt aşağıda açıklanan gerekçeler ile analiz dışında bırakılmıştır:

Herhangi bir metafor kaynağı içermeyen yanıtlar. Örneğin, “İspat yapmak, hayal gücünün en üst seviyelerini zorlamaktır. Zorlamak gibi değildir, direk öyledir. Çünkü ispat yapmak, bir probleme hayal gücü kullanarak yeni bir bakış açısı getirmektir. Bizim okullarda yaptıklarımız; bir problemin çözümü için yeni yollar tartışıp üretmek değil ancak orada yapılan ispatları ezberlemektir”. Burada öğrencinin herhangi bir metafor kaynağı kullanmadığı ve ispat yapmayı tanımladığı görülmektedir. Benzer şekilde ispat yapma ile ilgili olarak duygu ve düşüncelerin belirtildiği cevaplara da rastlanmıştır. Örneğin, “İspat yapmak çok zevkli... Genellikle ispatları ilk yaptığımda zorluk çekiyorum. Ama öğrendikten sonra kendimi çok mutlu hissediyorum. İspat yapmayı hayatımdaki başka bir şeyle kıyaslayamıyorum. Ders çalışmış oluyorum sadece...”

İspat yapmanın daha iyi anlaşılmasına bir katkısı olmayan metaforları içeren yanıtlar. Örneğin, “İspat yapmak bir tür top gibidir çünkü her yöne gidebiliyor”. Burada metaforun konusu (ispat yapmak) ve kaynağı (top) belirgin olmasına rağmen, bu metaforun ispat yapmayı daha iyi açıklamada herhangi bir yarar sağlamadığı (yani metaforun kaynağından metaforun konusuna atfedilebilecek herhangi bir önemli özelliği içermediği) kanısına varılmıştır.

Birden fazla kategoriye ait metaforları içeren yanıtlar. Örneğin, “İspat yapmak piramit yapmaya benzer çünkü en temel yapı taşlarından zirveye yükselen zor bir iştir. Ama sonunda gurur duyulabilecek ve insana haz verecek bir eser çıkar. Her ispat bize matematiği anlamada yardım eder ve bizi geliştirir.” Burada görüldüğü üzere öğrencinin ispat yapmanın hangi özelliğini ön plana çıkarmaya çalıştığı net değildir. Bir başka deyişle, bu metafor “Zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak ispat yapma”, “Tamamlandığında (başarıldığında) mutluluk veren bir işlem olarak ispat yapma” ve “Doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma” şeklinde isimlendirilen kategorilerden birden fazlasına ait özellik içermektedir.

Üçüncü aşama (derleme ve kategori geliştirme aşaması). Bu aşamada öğrencilerin ürettikleri ve ikinci aşama sonucunda elde kalan 51 metafor, ispat yapma ile ilgili olarak sahip oldukları ortak özellikler bakımından 10 adet kavramsal kategori altında toplanmış ve bu kategoriler içerdikleri metaforları en iyi temsil edecek biçimde isimlendirilmiştir.

Dördüncü aşama (geçerlik sağlama aşaması). Yıldırım ve Şimşek (2005, s. 257) “Toplanan verilerin ayrıntılı olarak rapor edilmesi ve araştırmacının sonuçlara nasıl ulaştığının açıklanması nitel araştırmada geçerliliğin önemli ölçütleri arasında yer almaktadır” ifadesini kullanmaktadır. Bu bağlamda bu araştırmada geçerliliğin sağlanması için veri analiz süreci ayrıntılı olarak anlatılmış ve belirlenen metaforları en iyi temsil eden kavramsal kategoriler bulgular bölümünde orijinal alıntılar kullanılarak ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Beşinci aşama (güvenirlilik sağlama aşaması). Araştırmanın güvenilirliğini sağlamak için ise belirlenen metaforlar listesi ile ulaşılan kavramsal kategoriler listesi bir başka araştırmacıya verilerek bunları uzman görüşü için eşleştirmesi istenmiştir. Ardından Miles ve Huberman'ın (1994) formülü (Güvenirlilik=görüş birliği/görüş birliği+görüş ayrılığı) kullanılarak uyuşma yüzdesi hesaplanmıştır. Yapılan bu işlem sonrasında %86 oranında bir uzlaşma sağlanmıştır.

Bulgular

Öğrenciler tarafından ispat yapma ile ilgili olarak ifade edilen metaforların verilerin analizi aşamalarından ilk ikisine tabi tutulması sonucu elde edilen bulgular Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1. Öğrencilerin ispat ile ilgili oluşturdukları metaforlar

Metaforlar	f	Metaforlar	f
Açıklığa kavuşturmak	2	İşkence	1
Araba kullanmak	2	Karanlığa ışık tutmak	1
Araba sürmeyi öğrenmek	1	Karışık bir şey	1
Aşk	1	Kendini tanıtmak	2
Bileşiği bileşenlerine ayırmak	1	Kesinleştirmek	2
Bilgi işi	1	Legolarla oynamak	1
Bir yolun tarifi	1	Matematiksel düşünebilmek	1
Bulmaca çözmek	2	Net karara ulaşmak	1
Çıkmaz sokak (labirent)	1	Okyanus	1
Defalarca yazmak	1	Papağanın yaptığını yapmak	1
Denizin dibini görmek	1	Polisin cinayeti çözene kadar verdiği çaba verdiği	1
Deveyi hendekten atlatmak	2	Polisin suçluyu yakalaması	1
DNA testi yaptırmak	1	Resim yapmak	1
Doğru yolu göstermek	1	Sağlama yapmak	1
Doğruları bulmak	1	Satranç oynamak	1
Düğüm	1	Sonu olmayan yol	1
Dünyanın ne söylediğini görmek	1	Soruyu tam olarak bilmek	1
Fiziği, edebiyatı, mantığı, konuşurmak	1	Uсталık yapmak	1
Futbol oynamak	2	Uzun bir yolda yürümek	1
Gerçeği öğrenmek	1	Yapboz tamamlamak	2
Gol atmak	1	Yaşam (hayat)	3
Gömleğin düğmeleri	1	Yemek yapmak	1
Hafızaya almak	1	Yeni bir ev inşa etmek	1
Hatiplik yapmak	1	Yolun sonunu görmek	1
İnsan psikolojisini çözmek	1	Zevkli bir oyun	1
İnsanın kendi yeteneklerini keşfetmesi	1	TOPLAM	61

Kavramsal Kategoriler

Veri analizinin üçüncü aşamasına uygun olarak Tablo 1'deki metaforlar derlenerek belirli kategoriler altında toplanmıştır. Buna göre üçüncü aşamanın sonunda 10 adet kavramsal kategori oluşturulmuştur. Bu kavramsal kategoriler içerdikleri metaforların frekansları dikkate alınarak numaralandırılmış ve Tablo 2'de verilmiştir:

Tablo 2. İspat yapma ile ilgili oluşturulan kategoriler

KATEGORİLER	f	%
1 Aydınlatma/Açıklığa kavuşturma işlevli ispat yapma	14	%23
2 Zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak ispat yapma	9	%14.8
3 Sabır-uğraş-özen-dikkat gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	8	%13.1
4 Doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma	7	%11.5
5 Yapıldığında/başarıldığında mutluluk veren bir işlem olarak ispat yapma	6	%9.8
6 Belli (doğru) bir sırası olan bir işlem olarak ispat yapma	4	%6.6
7 Bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	4	%6.6
8 Kesinlik gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	4	%6.6
9 Ezber gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	3	%4.9
10 Disiplinler arası bir işlem olarak ispat yapma	2	%3.3

Kategori 1 (aydınlatma/açıklığa kavuşturma işlevli ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 3'te verilmektedir. Elde edilen verilere göre bu kategoriye ait metaforların 14 (%23) katılımcı tarafından kullanıldığı ortaya çıkmaktadır.

Tablo 3. Aydınlatma/Açıklığa kavuşturma işlevli ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 1	Metaforlar	f
Aydınlatma /Açıklığa kavuşturma işlevli ispat yapma	Açıklığa kavuşturmak (açığa çıkarmak)	2
	Karanlığa ışık tutmak	1
	Yolun sonunu görmek	1
	Denizin dibini görmek	1
	Gerçeği öğrenmek	1
	Net karara ulaşmak	1
	Soruyu tam olarak bilmek	1
	Bileşiği bileşenlerine ayırmak	1
	Doğru yolu göstermek	1
	Doğruları bulmak	1
	Hafızaya almak	1
	Sağlama yapmak	1
	Bir yolun tarifi	1
	TOPLAM	14

Aydınlatma/Açıklığa kavuşturma işlevli ispat yapma şeklinde adlandırılan bu kategoriye oluşturan metaforların ortak özellikleri aşağıda özetlenmektedir:

Özellik 1 (ispat yapmak netleştirmek/doğrulamaktır). Bu özellik ile ilgili örnek ifadeler aşağıda verilmektedir:

“İspat yapmak gerçekleri açığa çıkarmak gibidir çünkü ispattan sonra kimsenin aklında soru işareti kalmaz”

“İspat yapmak karanlığa ışık tutmak gibidir çünkü teoremin karmaşık ve gizli dünyasına bir takım yardımcı formüller ve işlemlerle ulaşabiliriz. Anlaşılmayan yargılar ispatlarıyla açık ve net hale getirilebilir”

“İspat yapmak net karara ulaşmak gibidir çünkü sorunun ispatı ile gerçek sonuçlara ulaşılır”

“İspat yapmak doğru yolu göstermek gibidir çünkü ispat bir problemin çözümünü sorunsuz olarak bize gösterir”

“İspat yapmak soruyu tam olarak bilmek gibidir çünkü her şeyi ile konuyu anladığını gösterir”

“İspat yapmak doğruları bulmak gibidir çünkü doğru olup olmadığını kanıtıyoruz”

“İspat yapmak sağlama yapmak gibidir çünkü ispatlanan şeyin doğruluğunu sağlama yaparak gösteriyoruz”

“İspat yapmak hafızaya almak gibidir çünkü ispat ettiğimiz teoremden herhangi bir soru işareti kalmıyor aynı zamanda onu anlaşılır bir şekilde öğreniyoruz”

Özellik 2 (ispat yaparak görülmeyenler görülür). Bu özellik ile ilgili ifadeler aşağıda verilmektedir:

“İspat yapmak yolun sonunu görmek gibidir çünkü ispatını yaptığımız şeyi daha iyi görürüz”

“İspat yapmak denizin dibini görmek gibidir çünkü üstten görmek her şey değildir”

“İspat yapmak gerçeği öğrenmek gibidir çünkü görünenin altında yatanı bulursun”

Özellik 3 (ispat yaparak kullanılan formüllerin nereden geldiği gösterilir). Bu özelliği yansıtan ifadeler aşağıda verilmektedir:

“İspat yapmak bir bileşiği bileşenlerine ayırmak gibidir çünkü kullandığımız formüllerin nereden geldiğini gösteriyoruz”

“İspat yapmak bir yolun tarifi gibidir çünkü problem çözümünde kullanılan formüllerin nasıl geldiğini ve nasıl kullanılacağını göstermeye yarar”

Kategori 2 (zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 4'te verilmektedir. Bu verilerden zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait metaforların 9 (%14.8) katılımcı tarafından kullanıldığı anlaşılmaktadır.

Tablo 4. Zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 2	Metaforlar	f
Zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak ispat yapma	Deveyi hendekten atlatmak	2
	Çıkmaz sokak (labirent)	1
	Sonu olmayan yol	1
	Düğüm	1
	Okyanus	1
	İşkence	1
	Karışık bir şey	1
	İnsan psikolojisini çözmek	1
TOPLAM		9

Bu kategoriye oluşturan metaforların ortak özellikleri aşağıda özetlenmektedir:

Özellik 1 (ispat yapmak zordur). İspat yapmanın zorluğunu yansıtan örnek ifadeler aşağıdaki gibidir:

“İspat yapmak deveyi hendekten atlatmak gibidir çünkü zordur”

“İspat yapmak düğüm gibidir çünkü zordur”

“İspat yapmak işkence gibidir çünkü teorem ispatlamak bizim için zor”

Özellik 2 (ispat yapmak karmaşık/içinden çıkılması zor olan bir işlemdir). Bu özelliği yansıtan örnek ifadeler aşağıda verilmektedir:

“İspat yapmak çıkmaz sokak (labirent) gibidir çünkü ispata başlar ve bitiremezsin”

“İspat yapmak sonu olmayan yol gibidir çünkü girdin mi çıkamıyorsun”

“İspat yapmak okyanus gibidir çünkü boğuluyorsun”

“İspat yapmak insan psikolojisini çözmek gibidir çünkü ne kadar çözebiliyorum desem de anlamadığım çok şeyle karşılaşıyorum”

Kategori 3 (sabır-uğraş-özen-dikkat gerektiren bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 5'te verilmektedir. Elde edilen verilere göre bu kategoriye ait metaforların 8 (%13.1) katılımcı tarafından kullanıldığı ortaya çıkmaktadır.

Tablo 5. Sabır-uğraş-özen-dikkat gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 3	Metaforlar	f
Sabır-uğraş-özen-dikkat gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	Uzun bir yolda yürümek	1
	Uсталık yapmak	1
	Yemek yapmak	1
	Yeni bir ev inşa etmek	1
	Polisin cinayeti çözene kadar verdiği çaba	1
	Aşk	1
	Araba sürmeyi öğrenmek	1
	Resim yapmak	1
TOPLAM		8

Sabır-uğraş-özen-dikkat gerektiren bir işlem olarak ispat yapma şeklinde adlandırılan bu kategoriye oluşturan metaforların ortak özellikleri aşağıda özetlenmektedir:

Özellik 1 (ispat yapmak sabır gerektirir). İspat yapmanın bu özelliğine örnek teşkil eden ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak uzun bir yolda yürümek gibidir çünkü sabır gerektirir”

“İspat yapmak yeni bir ev inşa etmek gibidir çünkü sabırla nasıl meydana geldiğini yapıyoruz”

“İspat yapmak polisin cinayeti çözene kadar verdiği çaba gibidir çünkü sabır gerektirir”

Özellik 2 (ispat yapmak ustalık gerektirir). İspat yapmanın ustalık gerektirdiğini belirten ifadeler aşağıda verilmektedir:

“İspat yapmak ustalık yapmak gibidir çünkü bir uğraş vardır”

“İspat yapmak yemek yapmak gibidir çünkü ustalık ister”

Özellik 3 (ispat yapmak özen ister). İspat yapmanın özen gerektiren bir işlem olarak algılandığını gösteren ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak aşk gibidir çünkü insan aşkını özene bezene açıklar”

“İspat yapmak resim yapmak gibidir çünkü ince detaylar önemlidir, özenmek gerekir”

Özellik 4 (ispat yapmak dikkat gerektirir). İspat yapmanın dikkat gerektiren bir işlem olarak görüldüğünü gösteren ifade aşağıdaki gibidir:

“İspat yapmak araba sürmeyi öğrenmek gibidir çünkü dikkat ister”

Kategori 4 (doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 6’da verilmektedir. Bu verilerden doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma kategorisine ait metaforların 7 (%11.5) katılımcı tarafından kullanıldığı anlaşılmaktadır.

Tablo 6. Doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 4	Metaforlar	f
Doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma	Yapboz tamamlamak	2
	Bulmaca çözmek	2
	Polisin suçluyu yakalaması	1
	Satranç oynamak	1
	Legolarla oynamak	1
	TOPLAM	7

Doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan işlem olarak ispat yapma şeklinde adlandırılan bu kategoriye oluşturan metaforların ortak özellikleri aşağıda özetlenmektedir:

Özellik 1 (ispat yaparken doğru parçalar bir araya getirilir). İspat yapma sürecinde doğru parçaların bir araya getirilerek sonuca ulaşıldığı algısını yansıtan ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak bir yapbozu tamamlamak gibidir çünkü bir bütünün oluşum biçimine parça parça ulaşmamızı sağlar”

“İspat yapmak bir yapbozu tamamlayıp asıl fotoğrafa ulaşmak gibidir çünkü doğru parçaları doğru karelere yerleştirirsen problem kendiliğinden çözülecektir”

“İspat yapmak legolarla oynamak gibidir çünkü ispat yaparken de aynı legolarda olduğu gibi farklı şekilleri bir araya getirerek yeni şeyler ortaya koyabiliriz”

“İspat yapmak bir polisin suçluyu yakalaması gibidir çünkü bir kere polis suçluyu anında yakalayamaz bazı delillerle ulaşması gerekir, bunlar elle tutulur gözle görülür, açık olmalıdır”

Özellik 2 (ispat yaptıkça ispat yapma işi daha kolaylaşır). İspat yapma işleminin yaptıkça kolaylaşan bir işlem olarak algılandığını yansıtan ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak bulmaca çözmek gibidir çünkü anlayana kadar zorlanır sonra kolaylaşarak tamamlanır”

“İspat yapmak satranç oynamak gibidir çünkü satrançta oynadıkça kazanılan hamleleri görme özeliği ispatta da aynıdır. İspat yaptıkça birkaç işlem sonrasında daha rahat görebiliriz”

Özellik 3 (ispat tamlik gerektirir). İspat yapmanın eksik olmaması gerektiği yönünde algıyı gösteren ifadeye aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak bulmaca çözmek gibidir çünkü bulmaca da ispat gibi bir parçası eksik olursa bozuk olur”

Kategori 5 (yapıldığında/başarıldığında mutluluk veren bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriyi oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 7’de verilmektedir. Elde edilen veriler bu kategoriye ait metaforların 6 (%9.8) katılımcı tarafından kullanıldığını göstermektedir.

Tablo 7. Yapıldığında/başarıldığında mutluluk veren bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 5	Metaforlar	f
Yapıldığında/başarıldığında mutluluk veren bir işlem	Futbol oynamak	2
	Araba kullanmak	2
	Gol atmak	1
	Zevkli bir oyun	1
	TOPLAM	6

Yapıldığında/başarıldığında mutluluk veren bir işlem olarak ispat yapma kategorisini oluşturan metaforların ortak özellikleri aşağıda özetlenmektedir:

Özellik 1 (ispatı tamamlamak mutluluk verir). Tamamlandığında mutluluk veren bir işlem olarak algılanan ispat yapma ile ilgili ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak futbol oynamak gibidir çünkü ispat yapabildiğimde futbol oynarken geçirdiğim zamanda olduğum gibi mutlu oluyorum”

“İspat yapmak gol atmak gibidir çünkü gol attığımda nasıl seviniyorsam ispat yaptığımda da öyle mutluluk duyuyorum”

Özellik 2 (ispat yapmak zevklidir). İspat yapmanın zevkli bir işlem olarak algılandığını yansıtan ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak araba kullanmak gibidir çünkü ispat yapabilmek araba kullandığım kadar zevkli”

“İspat yapmak zevkli bir oyun gibidir çünkü eğlencelidir”

Kategori 6 (belli (doğru) bir sırası olan bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriyi oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 8’de verilmektedir. Bu verilerden belli (doğru) bir sırası olan bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait metaforların 4 (%6.6) katılımcı tarafından kullanıldığı anlaşılmaktadır.

Tablo 8. Belli (doğru) bir sırası olan bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 6	Metaforlar	f
Belli (doğru) bir sırası olan bir işlem olarak ispat yapma	Yaşam (hayat)	3
	Gömleğin düğmeleri	1
	TOPLAM	4

Belli (doğru) bir sırası olan bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait örnek ifadeler aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak yaşam gibidir çünkü doğru zamanda doğru adım atmak gerektirir”

“İspat yapmak bir gömleğin düğmeleri gibidir çünkü sonuna gelmeden yanlış olduğunu anlayamazsın”

Kategori 7 (bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriyi oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 9’da verilmektedir. Bu veriler bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait metaforların 4 (%6.6) katılımcı tarafından kullanıldığını göstermektedir.

Tablo 9. Bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 7	Metaforlar	f
Bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	Kendini tanıtmak	2
	İnsanın kendi yeteneklerini keşfetmesi	1
	Bilgi işi	1
	TOPLAM	4

Bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait örnek ifadelere aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak kendini tanıtmak gibidir çünkü bütün bilgilerini, öğrendiklerini kendi cümlelerinle, kendi mantığıyla hepsini birleştirerek yapmaktır. Bu şekilde kendinizi tanıtmış olursunuz, her şeyi siz yapmışsınızdır, hepsi kendi cümlelerinizdir”

“İspat yapmak insanın kendi yeteneklerini keşfetmesi gibidir çünkü yaparken doğruya ulaşmak için tüm bilgilerimizi ve yeteneklerimizi kullanmamız gerekir”

“İspat yapmak bilgi işi gibidir çünkü bilmediğin, yorumlayamadığın şeyi ispatlayamazsın”

Kategori 8 (kesinlik gerektiren bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 10'da verilmektedir. Elde edilen veriler bu kategoriye ait metaforların 4 (%6.6) katılımcı tarafından kullanıldığını göstermektedir.

Tablo 10. Kesinlik gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 8	Metaforlar	f
Kesinlik gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	Kesinleştirmek	2
	Matematiksel düşünebilmek	1
	DNA testi yaptırmak	1
	TOPLAM	4

Kesinlik gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait örnek ifadelere aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak kesinleştirmek gibidir çünkü neyin nerden geldiğinin kesin sonucuna varıyoruz”

“İspat yapmak matematiksel düşünebilmek gibidir çünkü sonuç kesindir”

“İspat yapmak DNA testi yaptırmak gibidir çünkü matematikteki her ifadenin kesin sonucunu öğrenebiliyorsun”

Kategori 9 (ezber gerektiren bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 11'de verilmektedir. Bu veriler ezber gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait metaforların 3 (%4.9) katılımcı tarafından kullanıldığını göstermektedir.

Tablo 11. Ezber gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 9	Metaforlar	f
Ezber gerektiren bir işlem olarak ispat yapma	Hatırlamak yapmak	1
	Defalarca yazmak	1
	Papağanın yaptığını yapmak	1
	TOPLAM	3

Ezber gerektiren bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait ifadelere aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak hatırlamak yapmak gibidir çünkü çoğu zaman ezber yapıyoruz”

“İspat yapmak defalarca yazmak gibidir çünkü ezberlemek gerekiyor”

“İspat yapmak papağanın yaptığını yapmak gibidir çünkü anlamadan ezberliyoruz”

Kategori 10 (disiplinler arası bir işlem olarak ispat yapma). Bu kategoriye oluşturan metaforlar ve bu metaforları üreten katılımcı sayısı Tablo 12'de gösterilmektedir. Elde edilen veriler bu kategoriye ait metaforların 2 (%3.3) katılımcı tarafından kullanıldığını ifade etmektedir.

Tablo 12. Disiplinler arası bir işlem olarak ispat yapma kategorisinde yer alan metaforlar

Kategori 10	Metaforlar	f
Disiplinler arası bir işlem olarak ispat yapma	Fiziği, edebiyatı, mantığı, geometriyi vb. konuşurmak	1
	Dünyanın ne söylediğini görmek	1
	TOPLAM	2

Disiplinler arası bir işlem olarak ispat yapma kategorisine ait ifadelere aşağıda yer verilmektedir:

“İspat yapmak fiziği, edebiyatı, mantığı, geometriyi vb. konuşurmak gibidir çünkü matematikte ispat bütün bilim dalları ile iç içedir”

“İspat yapmak dünyanın ne söylediğini görmek gibidir çünkü verileri analiz ederek bir hipotez ve kurama dönüştüren akıl, bunun gerçekliğini de kanıtlarsa dünyanın matematiksel olarak dilini çözmeye başlar”

Tüm kategoriler dikkate alındığında öğrencilerin ispat yapma ile ilgili algılarının daha çok ilk beş kategoriye ait metaforlar ile açıklandığını göstermektedir. Bu durum ispat yapmanın öğrenciler tarafından daha çok aydınlatma/açıklığa kavuşturma işlevi olan, zorluk ve karmaşa içeren, sabır-uğraş-özen-dikkat gerektiren ve doğru hamlelerle parçalardan bütüne/başarıya ulaşılan ve başarıldığında mutluluk veren bir işlem olarak algılandığını işaret etmektedir.

Tartışma

Öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışmadan elde edilen bulgular incelendiğinde üretilen metaforların genellikle tek bir kelime veya kavramdan ziyade birkaç kelimedenden oluştuğu görülmektedir. Bunun nedeninin öğrencilere yöneltilen kavramın, belirli bir süreci işaret etmesi olduğu düşünülmektedir. Zira matematiksel ispat süreçlerinin kendileri için neye benzediği sorusuna cevap olarak öğrencilerin yine bir süreci işaret eden cevaplar vermelerinin manidar olduğu aklı gelmektedir.

Araştırmadan elde edilen bulgular oluşturulan ilk beş kategori içerisinde yer alan metaforların öğrenciler tarafından daha yüksek oranda ifade edildiğini, bu beş kategori içinde ise öğrencilerin en fazla birinci kategoriye ait metaforları kullandığını göstermektedir. Birinci kategori altında yer alan metaforların kaynaklarının ve gerekçelerinin *ispatın açıklığa kavuşturma* ve *doğrulama fonksiyonunu* işaret eden nitelikte olduğu anlaşılmıştır. Bu doğrultuda öğrencilerin çoğunluğu için matematiksel ispat süreçlerinin *belirsiz durumları açıklığa kavuşturma* ve *belirsizlikleri giderme* anlamına geldiği söylenebilir. Elde edilen bu bulgu ile Güler, Özdemir ve Dikici'nin (2012) öğretmen adaylarının çoğunluğu için matematiksel ispatın ifadelerin doğruluğu anlamına geldiğini belirten sonuçları benzerdir. Benzer şekilde Hanna ve Jahnke (1999), Hanna (2000) ve Varghese'nin (2009) matematiksel ispatın matematiksel bilgileri doğrulama fonksiyonunu işaret eden çalışmaların sonuçları ile Uğurel'in (2010) öğretmen adaylarının ispat ile ilgili olarak matematiksel bir ifadenin doğrulanması ve açıklanmasına vurgu yaptıklarını belirten sonuçları çalışmamızın sonuçları ile uyum göstermektedir.

Araştırmamızdan elde edilen bulgular ikinci kategorinin ispat yapmanın zorluk ve karmaşa içeren bir işlem olarak algılandığını gösteren metaforlardan oluştuğunu göstermektedir. Elde edilen bu bulgu İmamoğlu'nun (2010) matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat konusundaki tutum ve inançlarını, ispat yaparken kullandıkları yöntem ve akıl yürütme şekillerini, başkaları tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini belirlemek amacıyla yaptığı çalışmasının sonuçları ile uyumludur. Söz konusu çalışmada üniversite son sınıf öğrencilerinin dahi ispat yapma ve değerlendirmede hala bazı zorluklar yaşadıkları belirtilmektedir. Daha önce yürütülen araştırmaların sonuçlarında, üniversite öğrencilerinin lisans derslerinde karşılaşılan ispatları yapmada ve anlamada zorluk çektiklerinin (Almeida, 2000; Dreyfus, 1999; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Moore, 1994; Recio ve Godino, 2001; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Weber, 2001; Weber, 2004) ve öğrencilerin kendilerine yeterince güvenmediklerinin (Anapa ve Şamkar, 2010) belirtildiği dikkate alındığında mevcut çalışmadan elde edilen bulguların anlamlı olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin bu bakış açılarında formal matematikle ve dolayısıyla formal bir matematiksel ispat ile tam anlamıyla ilk defa üniversite sıralarında karşılaşılıyor olmalarının etkili olduğu aklı gelmektedir. Dolayısıyla çalışmadan elde edilen söz konusu bulgular ve buna paralel olarak önceki çalışmalardan elde edilen birçok benzer sonuç şaşırtıcı değildir. Yurtdışında bazı üniversitelerde, lisedeki sistemden gelip ileri matematiksel düşünceye alışmakta ve formal matematiği anlamakta zorlanan öğrencilere yönelik geçiş dersleri bulunmaktadır (Knapp, 2005). Benzer nitelikteki uygulamalara yer verilmesinin lisans öğrencilerinin ispat yapma sürecinde yaşadıkları sorunlara çözümüne katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

Yapılan inceleme sonucunda üçüncü kategoriyi oluşturan metaforların ispat yapmanın *sabır, uğraş, özen ve dikkat gerektiren bir süreç* olarak algılandığına işaret eder nitelikte oldukları görülmüştür. Bu açıdan bakıldığında Nyaumwe ve Buzuzi'nin (2007), matematik öğretmenlerinin ispatla ilgili görüşlerini

inceledikleri çalışmalarının 34 öğretmenden 9'unun ispat süreçlerinin zaman alıcı olduğunu ve 7'sinin ise bu süreçlerin öğrencilere sıkıcı geldiğini gösteren sonuçları ile eldeki çalışmanın sonuçları benzerlik göstermektedir.

Dördüncü kategoriye oluşturan metaforlar incelendiğinde ise ispatın öğrenciler tarafından parçaların doğru adımlarla ile bir araya getirilmesini gerektiren bir işlem olarak algılandığı anlaşılmaktadır. Zhou ve Bao (2009), 152 matematik öğretmeni ile yürüttükleri çalışmalarında öğretmenlerin %86'sının matematiksel ispatın ne olduğu ile ilgili olarak ispat yapılırken makul kurallar izlemesi yönünde cevap verdiklerini belirtmektedirler. Benzer olarak Morrow (2004) matematik bölümü öğrencilerinin matematiksel ispata bakış açılarını incelediği çalışmasında örnekleme yer alan öğrencilerin matematiksel ispat süreçlerini, adım adım gerçekleşen sistematik bir süreç olarak tanımladıklarını ifade etmektedir. Bu bağlamda araştırmamızdan bu kategoriye ait bulguların sözü geçen araştırmaların ilgili sonuçları ile benzerlikler gösterdiğini söyleyebiliriz. Diğer taraftan beşinci kategoride yer alan metaforlar ispat yapma işleminin başarılı olduğunda mutluluk vermesi ile ilgilidir zira bulgular geçerli metafor üreten öğrencilerin %9.8'inin ispat yapmayı tamamladığında, başarılı olduğunda mutluluk veren bir işlem olarak algılandıklarını göstermektedir.

Araştırma bulguları incelendiğinde öğrencilerin ispat yapmanın öncelikle belirsizlikleri gideren ve açıklığa kavuşturan yönüne, daha sonra ise zor bir süreç olduğuna, sabır, uğraş, özen ve dikkat gerektiren karmaşık adımlar içerdiğine, doğru adımlar atıldığı takdirde parçadan bütüne ilerleyerek sonuca ulaşılabilen ve başarılı olduğunda mutluluk veren yapısına vurgu yaptıkları dikkat çekmektedir. Diğer taraftan altıncı ve sonraki kategorilerin ilk beş kategoriye göre daha az sayıda metafordan oluştuğu belirlenmiştir. Aynı sayıda metafordan oluşan altıncı, yedinci ve sekizinci kategoriler ise sırasıyla ispat yapmanın kesinlik gerektiren bir işlem olması, belli (doğru) bir sırası olması ve bilgileri yorumlamayı gerektiren bir işlem olması ile ilgilidir. Bu açıdan bakıldığında eldeki çalışmanın söz konusu bu bulguları ile Moore'nin (1994) öğrencilerin matematiksel ispatı, prosedürel ve yapılması gereken bir dizi aşama olarak gördüğünü belirten çalışmasının sonuçları ile Nyaumwe ve Buzuzi'nin (2007) 34 öğretmenden 14 'ü (%41) için matematiksel ispat yapmanın eğlenceli olduğunu belirten çalışmalarının sonuçlarının paralellik gösterdiğini söyleyebiliriz.

Conradie ve Firth (2000, aktaran Karaoğlu, 2010), üniversitede okutulan matematik derslerinin genellikle ilk bakışta zor anlaşılan ispatlardan oluşması nedeniyle en iyi öğrencilerin bile temel bir sonucun ispatını yapmakta zorlanabildiklerini ve bu nedenle ispatın temel yapısını ve birtakım inceliklerini, zayıf öğrencilerin ise büyük bir olasılıkla hiçbir şey anlamadan bütün ispatı kelime kelime ezberlemeye çalıştıklarını belirtmektedir. Bu çalışmada dokuzuncu kategori altında yer alan metaforları içeren görüşlerin ispat yapmanın ezber gerektirdiğine vurgu yaptığı dikkate alındığında çalışmamızın sonuçlarının benzer noktayı işaret ettiğini söyleyebiliriz. Ancak şunu belirtmek gerekir ki bu kategori altında yer alan metaforların sayısı üç ile sınırlıdır. Yani öğrencilerin çok az bir kısmının (%4.9) ispat yapma ile ilgili algılarını temsil etmektedir. Sarı, Altun ve Aşkar (2007) orta ve düşük düzeydeki öğrencilerin ispatın ezbere yapılan bir iş olduğu ve matematiksel anlamaya hiçbir katkısının olmadığı görüşünde olduklarını belirtmektedir. Bu anlamda bu üç metaforun düşük düzeydeki öğrenciler tarafından üretilmiş olabileceği ihtimali akla gelmektedir. Onuncu ve son kategori altında toplanan metaforlar ise ispat yapmanın disiplinler arası bir işlem olduğuna vurgu yapmaktadır.

Çalışmadan elde edilen bulgular matematik bölümü lisans öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarını genellikle olumlu anlamlar içeren metaforlar yoluyla belirttiklerini ortaya koymaktadır. O halde bu bulgunun Güler, Özdemir ve Dikici'nin (2012) öğretmen adaylarının ispata yüklediği anlamların olumlu olduğunu belirten çalışmasının sonuçlarıyla paralellik gösterdiğini söyleyebiliriz. Benzer olarak Köğçe'nin (2012) lisans düzeyindeki öğrencilerinin (matematik öğretmeni adaylarının) büyük çoğunluğunun ispatın matematik öğrenmeye katkı sağlayacağına inandıklarını, yani öğretmen adaylarının ispatın zihinsel anlamda sağlayacağı faydalardan haberdar olduklarını belirten çalışmasının sonuçları, ispat yapma ile ilgili olarak olumlu anlamlar taşıması nedeniyle çalışmamızın bulguları ile ortak noktaları işaret etmektedir.

Sonuç ve Öneriler

Matematiksel ispat süreçleri, öğrencilerin, matematiği bir bütün olarak ve derinlemesine anlamalarını, mevcut bilgilerinin gerekli yerlerde uygun olarak kullanabilmelerini, etkili muhakemeler geliştirebilmelerini, matematiksel tartışmalarda yer alabilmelerini vb. birçok süreçte başarılı olmalarını ve bu süreçlerde yer alabilmeleri için gerekli olan tüm matematiksel becerilerin gelişimini sağlamaktadır. Bu açıdan bakıldığında ispatın matematiğin kendi içinde olduğu kadar matematik eğitiminde de tartışılmaz bir öneme sahip olduğu görülmektedir. Araştırma sonucunda öğrencilerin en çok ispatın aydınlatma/açıklığa kavuşturma işlevini işaret eden algılara sahip olduğunu anlaşılmıştır. Burada üretilen metaforlar ile ilgili olarak sunulan gerekçeler ispat yapmanın ne denli önemli olduğu ile ilgili öğrenci düşüncelerini yansıtmaktadır. Yine ispat yapma işleminin öğrenciler tarafından sabır/uğraş/özen/dikkat ve doğru hamleler gerektiren bir işlem olarak görülmesi bu durumu onaylamaktadır. Dolayısıyla öğrenci algılarının ispat yapmanın matematikteki önemini yansıtacak nitelikte olduğu sonucuna varılmıştır.

Araştırmadan elde edilen diğer bulgular öğrencilerin ispat yapmayı zor ve karmaşık bir işlem olarak gördüklerini ortaya koymuştur. İspat yapma sürecinde yaşanan zorlukların aşılmasına katkı sağlamak amacıyla lise yıllarındaki alışkanlıkları ile lisans düzeyine gelen öğrencilerin matematiğin pür ve aksiyomatik yapısını anlamalarına yardımcı nitelikte geçiş derslerinin verilmesinin faydalı olacağı düşünülmektedir. Eldeki araştırma süresince yapılan literatür çalışmaları göstermiştir ki matematiksel ispat süreçlerinin öğrenciler için ne ifade ettiğine ve bu süreçlerde öğrencilerin sahip oldukları duygu ve inançlara yönelik çok az sayıda çalışma mevcuttur. Yapılacak yeni çalışmalar ile öğrencilerin matematiksel ispat süreçlerinde hangi noktalarda zorlandıklarının ve hangi noktalarda olumsuz tavır sergilediklerinin belirlenmesi, bu olumsuz durumlara çözüm üretmeye katkı sağlayabilecektir. Öğrencilerin yaşadıkları zorlukların aşılabilmesi için ispat süreçlerinde daha etkili yer almalarını sağlayacak uygulamaların planlanması önerilmektedir. Öğrencilerin ispat yapmayı başardıklarında mutlu olduklarını gösteren bulgular da dikkate alınarak öğrenme güdüsünü artırıcı uygulamaların neler olabileceği ile ilgili araştırılmaları ihtiyaç duyulmaktadır. Böylelikle öğrencilerin ispat yapma sürecinde ezber yapmalarının önüne geçilmesine katkı sağlanabilecektir.

Kaynaklar

- Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Alger, C. (2009). Secondary teachers' conceptual metaphors of teaching and learning: changes over the career span. *Teaching and Teacher Education: An International Journal of Research and Studies*, 25(5), 743 - 751.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications from mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Anapa, P. ve Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 2700-2706.
- Arslan, M. ve Bayrakçı, M. (2006). Metaforik düşünme ve öğrenme yaklaşımının eğitim-öğretim açısından incelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 171, 100-108.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35 (156), 17-31.
- Aydoğdu, T., Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri. *Eğitim Araştırmaları*, 4(12), 64-74.

- Aydoğdu, E. (2008). *İlköğretimokullarındakiöğrenciveöğretmenlerinsahip olduklarıokulalgılarıyla ideal okul algılarının metaforlar yardımıyla analizi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III). Beijing: Higher Education Press.
- Cerit, Y. (2008a). Öğretmen kavramı ile ilgili metaforlara ilişkin öğrenci, öğretmen ve yöneticilerin görüşleri. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 6(4), 693-712.
- Cerit, Y. (2008b). Öğrenci, Öğretmen ve yöneticilerin müdür kavramı ile ilgili metaforlara ilişkin görüşleri. *Eğitim ve Bilim*, 33 (147), 3-13.
- Conradie, J., & Firth, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 225-235.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (2002). *Matematiğin seyir defteri*. Ankara: Doruk Yayıncılık.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 85-109.
- Güler, G., Akgün, L., Öçal, M. F. ve Doruk, M. (2012). Matematik öğretmeni adaylarının matematik kavramına ilişkin sahip oldukları metaforlar. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(2), 25-29.
- Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20 (1), 219-236.
- Güveli, E., İpek, A. S., Atasoy, E. ve Güveli H. (2011). Sınıf öğretmeni adaylarının matematik kavramına yönelik metafor algıları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 2(2), 140-159.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40, 345-353.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the Twenty Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 3, 73-80. Haifa, Israel.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R. A. Simons (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* (pp. 265-290). Washington, DC: Mathematical American Association.
- İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilmeye performansları*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kilic, C. ve Yelken-Yanpar, T. (2013). Belgian and Turkish pre-service primary school teachers' metaphoric expressions about mathematics. *Eurasian Journal of Educational Research*, 50, 21-42.

- Köğce, D. (2012). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 27-30 Haziran, Niğde.
- Knapp, J. (2005). Learning to prove in order to prove to learn. Retrieved 16-August-2012 from http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf.
- Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40, 341–344.
- Massengill, S. D., & Mahlios, M. (2008). Pre-service teachers' metaphors of teaching and literacy. *Reading Psychology*, 29(1), 31-60.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*, Thousand Oaks, CA: Sage.
- Mingus, T. T. Y., & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99 (8), 438–444.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- Morrow, M. (2004). Calculus students' views of justification and proofs in mathematics. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 19(2), 104 - 126.
- Nalçacı, A. ve Bektaş, F. (2012). Öğretmen adaylarının okul kavramına ilişkin algıları. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(1), 239-258.
- Nyaumwe, L., & Buzuzi, G. (2007). Teachers' attitudes towards proof of mathematical results in the secondary school curriculum: The case of Zimbabwe. *Mathematics Education Research Journal*, 19(3), 21-32.
- Ocak, G. ve Gündüz, M. (2006). Eğitim fakültesini yeni kazanan öğretmen adaylarının öğretmenlik mesleğine giriş dersini almadan önce ve aldıktan sonra öğretmenlik mesleği hakkındaki metaforlarının karşılaştırılması. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(2), 293-310.
- Oflaz, G. (2011). *İlköğretim öğrencilerinin 'matematik' ve 'matematik öğretmeni' kavramlarına ilişkin metaforik algıları*. 2nd International Conference on New Trends in Education and Their Implications, 27-29 April, Antalya.
- Özdemir, M. (2012). Lise öğrencilerinin metaforik okul algılarının çeşitli değişkenler bakımından incelenmesi. *Eğitim ve Bilim*, 37 (163), 96-109.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18 Eylül, Ankara, Bildiriler Kitabı Cilt II, s.1083-1089.
- Öztürk, Ç. (2007). Sosyal bilgiler, sınıf ve fen bilgisi öğretmen adaylarının "coğrafya" kavramına yönelik metafor durumları. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 55-69.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Pratte, R. (1981). Metaphorical models and curriculum theory. *Curriculum Inquiry*, 11 (4), 307-320.
- Pektaş, M. ve Kıldan, A. O. (2009). Farklı branşlardaki öğretmen adaylarının "öğretmen" kavramı ile ilgili geliştirdikleri metaforların karşılaştırılması. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 271-287.
- Raman, M. (2003). What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319–325.
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-89.
- Saban, A. (2004). Giriş düzeyindeki sınıf öğretmeni adaylarının "öğretmen" kavramına ilişkin ileri sürdükleri metaforlar. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2(2), 131-155.

- Saban, A. (2008). İlköğretim I. kademe öğretmen ve öğrencilerinin bilgi kavramına ilişkin sahip oldukları zihinsel imgeler. *İlköğretim Online*, 7(2), 421-455.
- Saban, A. (2009). Öğretmen adaylarının öğrenci kavramına ilişkin sahip oldukları zihinsel imgeler. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 7(2), 281-326.
- Saban, A., Koçbeker, B. N. ve Saban, A. (2006). Öğretmen adaylarının öğretmen kavramına ilişkin algılarının metafor analizi yoluyla incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 6(2), 461-522.
- Saban, A., Koçbeker, B. N. ve Saban, A. (2007). Prospective teachers' conceptions of teaching and learning revealed through metaphor analysis. *Learning and Instruction*, 17(2), 123-139.
- Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295-319.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Şengül, S. ve Katrancı, Y. (2012). İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin "matematik" kavramına ilişkin sahip oldukları metaforlar. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 355-369.
- Tatar, N. ve Murat, S. (2011). Öğretmen adaylarının değerlendirmeye yönelik algıları. *e-International Journal of Educational Research*, 2(4), 70-88.
- Thomas, L., & Beauchamp, C. (2011). Understanding new teachers' professional identities through metaphor. *Teaching and Teacher Education*, 27, 762-769.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154.
- Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-14.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28th, Bergen, Norway, 14-18.
- Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360.
- Yee, S. P. (2012). *Students' metaphors for mathematical problem solving*. Unpublished Doctoral dissertation, Kent State University College of Education, Ohio.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zhou, C., & Bao, J. (2009). A survey on mathematical proofs among teachers. *Frontiers of Education in China*, 4(4), 490-505.