NİTEL DEĞİŞKENLİ RANKI TAM OLMAYAN MODELLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS MATRİSLERLE ÇÖZÜMÜ VE SOSYAL BİLİMLERDEKİ MATEMATİK ÖĞRETİM YÖNTEMLERİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

*** Prof.Dr. Adnan Mazmanoğlu,**

**** Prof.Dr. Yasemin Kahramaner**

ÖZET: Klasik Analizle çözülemeyen bazı veri tiplerine çözüm getirilmek için lineer modellerin matrislerle ifade ve çözümlemesinin (analizi) bazı sakıncaları vardır[l].Uzun süre nitel değişkenlerin sözkonusu olduğu araştırmaların istatistiksel değerlendirmelerinde lineer modellerden yararlanırken başvurulan yöntem genellikle Variyans Analizi (Çözümlemesi) dir[2]. Ancak bu yaklaşımla matris cebrinin pek ötesine gidilmeyip tekrar klasik yöntemlere dönülmüştür ya da bir takım kısıtlamalara gidilerek çözüm yolları aranmıştır. Bunun başlıca nedeni nitel değişkenler kullanarak oluşturulan model genel olarak:

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

biçiminde olup bu modellerde tek çözüm elde edilememektedir. Çünkü bu modelden elde edilen

$$(X'X)\hat{\beta}=X'Y$$

normal denklemlerinin X'X matrisi özel bir yapı gösterip, bunun rankı tam değildir. Klasik anlamda normal denklemlerin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmadığından (tam ranklı değil) ters matrisi yoktur.Bilinmeyen parametreler vektörü için tek çözüm olmadığından ya kısıtlamalara gidilmektedir ya da önceden uygun koşullar öne sürülerek çözüm getirilmektedir. Ancak bu şekilde

*Marmara Üniversitesi FEn-Edebiyat Fakültesi
**İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

çözümsüzlüğün üstesinden geliniyordu. Çalışmamızda yine nitel değişkenlerle oluşturulan modele kısıtlamalar olmadan da *"Genelleştirilmiş Ters Matrislerle"* çözüm bulunabileceğini göstereceğiz.

1. GİRİŞ

1.1. Lineer Denklemler, Tam Rank ve Lineer Modeller:

Bilinmeyen sayısı ne olursa olsun lineer denklemlerin matrisyel yazılışı

$$AX=Y \qquad (1)$$

şeklindedir. Bu yazılışta:

A: Katsayılar Matrisini,

X: Bilinmeyenler Vektörünü, Y: Bilinen Değerler vektörünü

göstermektedir. Bu denklem sistemine çözüm ararken denklem sayısının, bilinmeyen sayısına eşit olması durumunda A kare matris olacağından ve $|A| \neq 0$ ise A'nın tersi alınabilir ve A'dan elde edilen $|A| \neq 0$ olması A'nın *"ranknın tam"* olduğunu yani tekil olmadığını gösterir. Çözümde $X=A^{-1}Y$ olur, Ancak uygulamalarda her zaman lineer denklemlerle bilinmeyenler arasında değişik durumlar söz konusu olabilmektedir. A kare matristir fakat *tam ranklı değildir.* ($|A|=0$) yani üç farklı durum ortaya çıkar: n denklem sayısını q bilinmeyen sayısını göstermek üzere

$$\underset{(n,q)}{A}\,\underset{(q,1)}{X}=\underset{(n,1)}{Y}$$

biçiminde olan sistemde A nın rankını r(A)=r olarak gösterirsek;

1)n=q=r ise, A bir kare matris ve A rankı tam olarak tanımlanır.

2)n=q, r<q ise yine A bir kare matris olur ama rankı tam değildir. (|A|=0)

3)n≠q ise A ister istemez dikdörtgen matris şeklinde olacaktır. (r<q) ise, sütun r<n ise satır matris de *"Rankı Tanı Olmayan Matris"* olacaktır. Yukardaki durumlardan 2. ve 3. durumda A'nın klasik matris analizinde tersi alınamaz. Yani A^{-1} yoktur denir.

AX=Y modelinde n=q ve r<q olduğunda bu denklem sistemi tarafımızdan "Rankı Tam Olmayan Lineer Denklem" olarak adlandırılacaktır. Üç durumun da söz konusu olduğu çalışmalarda önemli olan sistemin çözümünün olmasıdır ki bu da sistemin "tutarlı" olmasına bağlıdır.

2. LİNEER DENKLEMLER

Toplumların değişimine neden olan teknolojik bilimsel devrimin durmadan yeni teknolojiler üretmesi, ister istemez toplumsal yaşamı hızlı bir şekilde değiştirmektedir.

Öngörülerde, tahminlerde bulunmak ve bu doğrultuda kararlar almak için istatistiksel tekniklere başvurmaktayız. Modeli, genellikle olaylar ya da olaylara etki eden değişkenler arasında olduğunu varsaydığımız bağlantıyla simgesel olarak ifade ederiz ve çalışmamızda görüleceği gibi modelimiz gerçek bilgi ve değerlere bağlı olduğundan daha basit anlaşılır durumda simgesel olarak kullanılacaktır.

İstatistiksel olarak;

- Modelin ana kütleyi temsil ettiğini varsayıyoruz,
- Modelin parametreleri bilinmediğinden yaptığımız gözlem yada deneylerle parametrelerimizi tahmin ediyoruz,
- Bu işlem örnekler ve bu örneklerden elde edilen modele uygulanan bir takım testlere göre kararlar alınır veya kararlara varılır. Çalışmamızda nitel değişkenler sözkonusu olduğundan Searle [3] gibi yazarların ifade ettiği gibi lineer modellere çözüm getirmeye çalışacağız.

Lineer Modeller değişkenlerin nicel ve nitel oluşlarına göre *"Rankı Tam* Olan Modeller" ve *"Rankı Tam Olmayan Modeller"* olarak ifade edilmeleri, matrisyel yazılışlarla çözüm bulunmasına sakınca yaratmamaktadır. Örneğin eğitim yöntemlerinin bir takım öğrenci grupları üzerinde başarısının araştırılması, bazı ilaçlarla iyileşme süreleri arasındaki ilişki, bir kaç tür buğdayın ortalama dönüm başına verdikleri ürünlerin saptanması, gübre ve bitki türleri ile verim, bilgisayar programlama tekniklerinin öğretiminin etkinliğinin ölçülmesi v.b. ilişkilerle ilgilendiğimizi düşünürsek, gübre, eğitim yöntemleri, bitki, bilgisayar programlama teknikleri v.b değişkenlerin hepsi niteldir. Bunlar genel olarak *Faktör* adıyla anılır. Nitel değişkenli olan çalışmamızda modelimiz

$$Y=X\beta+\varepsilon \qquad (2)$$

gibi bir denklemden yararlanarak yapılacaktır. Bu temel bilgileri verdikten sonra ileride açıklamaya çalışacağımız modeldeki X matrisinin özel bir yapısı vardır. Bu yapıdan kaynaklanan özel durum da *rankının tam olmamasıdır.* Ancak regresyon modelinde gözlemlere ilişkin modelimiz,

$$y_i=\beta_0+\beta_{i1}X_i+\varepsilon_i \qquad (i=1,2,...,n) \quad (3)$$

dir ve bunun matrisyel biçimde yazılışı yine

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklindedir ve normal denklemlerin

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y \qquad (4)$$

biçiminde olabileceğini ve bu tür modellerde (X'X) matrisinin çözüm için tersinin alınabileceğinden

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (5)$$

temel tanımları verilir. Bu tanımlara göre, ister kare(tekil ya da tekil olmayan) ister dikdörtgen olsun bir A matrisinin aşağıdaki dört koşulu yerine getiren A ile gösterilecek bir tek *genelleştirilmiş ters matrisinin* bulunabileceği kanıtlanmış olur.

1) $AA^{-}A = A$
2) $A^{-}AA^{-} = A^{-}$
3) $(AA^{-})' = AA^{-}$
4) $(A^{-}A) = A^{-}A$

A gibi bir matris, lineer denklem sistemlerinin çözümünde rahatça kullanılmaktadır. A nın boyutu büyük olduğundan bu dört koşulu sağlayan matrisin hesabı o zamanda çok güç olmasına karşın gelişen bilgisayar teknolojilerine paralel olarak hızlı işlemciler sayesinde bu engel de kalkmış bulunmaktadır. **Penrose** yalnızca birinci koşul yerine getirildiğinde elde edilen genelleştirilmiş ters matris AX=Y denklem sistemine çözüm getirmiştir. Daha sonraki çalışmalarda örneğin M.İpekçi[1] yaptığı çalışmada, değindiği gibi 1. koşulu yerine getiren bir genelleştirilmiş ters matris için bir çok bilim adamı değişik adlar kullanmışiardır[5]. "Ters benzeri (Sheffield, John)", "etkin ters (Wilkinson)"," koşullu ters (Bose, Graybill)" , "g-ters (Rao,Winer,Searle)", "tek koşullu g-ters(Pringle Rayner)", "tek

[1] Merih İpek, "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olamayan Modellere Uygulama", a.g.e. S.21

koşullu-g-ters(Pringle-Rayner)" , "zayıf genel ters (Goldman-Zeien)" gibi Çalışmamızda bunlardan Searle ve Haussman, Searle'in çalışmalarında temel alınan

$$AGA=A \qquad (6)$$

eşitliğinde Penrose'un 1. koşulunu sağlayan herhangi bir G matrisine "A nın bir genelleştirilmiş ters matrisi adını vereceğiz ve G veya g-ters sembolüyle ifade edeceğiz.

Burada önemli bir noktaya daha değineceğiz. (6) nolu denklemi sağlayan G tek olmayıp diğer koşullara da uyar. Yukarıda adını verdiğimiz yazarlardan Rao veya Searle'in ifade ettiği gibi tek bir g-ters'in lineer denklem sistemine çözüm getirebilmesi gerekli değildir. Yani herhangi bir g-ters çözüme yeterlidir. Yani hangi G elde edilirse edilsin bazı parametre sonuçlarının değişmediği gibi önemli bir yaklaşımın doğmasına yardımcı olmuştur.[2]

2.1. RANKI TAM OLMAYAN LİNEER MODELLERE UYGULAMA

Ele alınan modellerin nitel değişkenlere bağlı oluşları ister istemez X'X matrisinin rankının tam olmamasına yol açtığını önceden açıklamıştık. G ters matrisini kullanarak çözüm bulup bu çözümün tek çözüm olmayışının yarattığı sorunların kolayca ortadan kalkabileceğini , istatistiksel çözümlemeyle bazı tahmin ve anlamlılık testlerinin kolayca yapılabileceğini göreceğiz.

Meslek türleri, eğitim yöntemleri, tedavi yöntemleri, öğrenim durumları, vb...gibi faktörlerin nitel değişkenli modellerin açıklayıcı değişkenleri olup bu faktörlerin değişik sınıf veya kategorileri olabileceği gibi biz bunlara çalışmamızda **düzey** adını vereceğiz. Örneğin üç değişik tedavi yönteminin bir hastalığı iyileştirmede etkilerinin incelendiği , bir malın üretiminde 4 ayrı makina tipi kullanıldığını ve

[2]Merih İpek, "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olamayan Modellere Uygulama", a.g.e.S.22-48

bunun sonucunda makina tiplerinin malın kalitesinde etkisinin olup olmadığının araştırılması gibi. Bu örneklerde tedavi yöntemleri ,tedavi yöntemi faktörünün üç düzeyi makina faktörünün ise 4 düzeyinden söz etmiş oluruz.

3. UYGULAMA:

Sosyal bilimlerde anlatılan matematik derslerinin 3 ayrı öğretim yöntemine başvurularak yapıldığı, bunların öğrencilerin başarısında değişik etkileri olup olmadığını araştırmak isteyelim. Rastgele seçilen 12 öğrenciden üçüne 1. yöntem, dördüne 2. yöntem, beşine 3.yöntemi uyguladık:

l.yöntem olarak ifade edilen öğretim yöntemini;

"Bilgisayar teknolojileri kullanarak mesleki veya kendi dersleriyle ilgili internet siteleri ve web sayfalarını kullanmak",

2.yöntem olarak ifade edilen öğretim yöntemini;

"Klasik anlamda ders notları, kitap ve kütüphane olanakları kullanılarak uygulanan yöntem"

3. yöntem olarak da;

"Mesleki derslerdeki konulara uygun örnekler seçilerek konuların anlatımıyla ilgili yöntem" yani; daha açık bir ifadeyle dersler anlatılırken mesleklerinde karşılaşacakları problemlerle ilgili örnekler seçilerek konuların anlatılması yöntemi.

Bu üç değişik yöntem değişik dönemlerde farklı sosyal bilim dallarındaki öğrencilere uygulandığında ve 100 puan üzerinden değerlendirildiğinde aşağıdaki gibi sonuçlar elde edilmiştir:

	Eğitim Yöntemleri		
	I	II	III
Puanlar	50	75	90
	60	50	60
	45	40	40
		80	70
			80

Eğitim yöntemi faktörünün görüldüğü gibi 3 düzeyi ele alınmıştır Bu deneyimize ilişkin modelimizi kuralım. Burada faktörü A ile göstereceğiz.

$$y_{ij} = \mu+\alpha_j+\varepsilon_{ij} \qquad (7)$$

Bu bir lineer model olup her y_{ij}, 3 faktör düzeylerine ait bileşenlerin toplamını göstermektedir. Bu model $\mu+\alpha_j$ gibi ana kütleyi belirleyici bölümle rastlantısal olarak denetlenemeyen kalıntı parametresi olan ε_{ij} bölümden oluşmaktadır. Burada μ ana kütle ortalamasını α_j bir A faktörünün j. Sınıfının (kategorisinin) ya da düzeyinin etkisini ε_{ij} kalıntı ya da hata yada sapma adı verilen *"Raslantısal Etki"* terimini göstermektedir. Bu model *"Tek Yönlü Sınıflandırma Modeli"* ya da *"Tek Faktörlü Sınıflandırma Modeli"*[3] olarak adlandırılmaktadır. ε_{ij} raslantı değişkenine ilişkin bazı varsayım ve koşulların da konulması gerekmektedir. Aynı modeli gözlemleri dikkate alarak modelin denklemlerini yazalım.

$50=y_{11} = \mu+\alpha_1+\varepsilon_{11}$

$60=y_{11} = \mu+\alpha_1+\varepsilon_{21}$

$45=y_{11} = \mu+\alpha_1+\varepsilon_{31}$

[3]l-way Classification Model

$75=y_{12} = \mu+\alpha_2+\varepsilon_{12}$
$50=y_{22} = \mu+\alpha_2+\varepsilon_{22}$
$40=y_{32} = \mu+\alpha_2+\varepsilon_{32}$
$80=y_{42} = \mu+\alpha_2+\varepsilon_{42}$
$90=y_{13} = \mu+\alpha_3+\varepsilon_{13}$
$60=y_{23} = \mu+\alpha_3+\varepsilon_{23}$
$40=y_{33} = \mu+\alpha_3+\varepsilon_{33}$
$70=y_{32} = \mu+\alpha_3+\varepsilon_{43}$
$80=y_{53} = \mu+\alpha_3+\varepsilon_{53}$

Bu denklemlerin matrislerle ifadesi açık şekilde

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \\ y_{42} \\ y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \\ y_{43} \\ y_{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{53} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ve daha genel olarak;

$$Y=X\beta + \varepsilon$$

Şeklinde yazılabilir.Burada;

Y: Gözlemler (gerçek veriler)matrisi,

X: Katsayılar matrisi

β : Bilinmeyen parametreler vektörü olup iki alt vektörü μ ve α_j dir.

ε :Raslantısal gözlenemeyen hatalar vektörünü göstermektedir.

Daha önce de değindiğimiz gibi X matrisinin özel bir yapısı vardır.

Bu yapı:

1) Görüldüğü gibi 1 ve 0'lardan oluşmaktadır.
2) 1. sütun tüm diğer sütunların toplamından oluşmaktadır. Bu özellik lineer bağımsız sütun sayısının 3 olduğunu ifade eder. Rank ise 3 olup 4 olamaz. Dolayısıyla sisteme tam ranklı bir sistem diyemeyiz..

3.1. Normal Denklemler :

(8)' deki modelin daha geniş bir tanımını ve ε ' a ait varsayımları yazalım.

Y : (12,1) boyutlu gözlemler vektörümüz ,

X : (12,4) boyutlu katsayılar matrisimiz,

β : (4,1) boyutlu bilinmeyen vektörümüz,

ε : (12,1) boyutlu raslantısal ve gözlenemeyen deneylerden doğan hatalar vektörümüz olup

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

Matrisyel yazılışta ki ε 'a ait yan koşulları yazarsak:

$\rightarrow E(\varepsilon)=0$ burada $Var(\varepsilon)= E(\varepsilon\varepsilon')$

→ ε_{ij} 'ler bağımsız olup $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I_4$

→ ε 'a ait dağılım Normal olup bu dağılım $N(0, \sigma^2 I_4)$ şeklindedir.

Bu koşullar ve yazılışlar bazı yazarlarca bu modele regresyon modelinin özel bir biçimi olduğunu fakat tek farkın X matrisinin özel yapısından kaynaklandığını ifade etmelerine neden olmuştur. $\hat{\beta}$ bilinmeyen parametre vektörlerini göstermek üzere bunların tahmini için

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y$$

normal denklemlerinden tam ranklı regresyon modellerinden bilindiği gibi tek çözümü

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

şeklindedir ve $E(\hat{\beta}) = \beta$ dır.

Fakat modelimizde ve X matrisinin tam ranklı olmaması ve tamamen 0 ve 1 lerden oluşan ve adına yapay değişken dediğimiz değerlerin oluşturduğu bir *Gösterge Tasarım Matrisi* elde edilir. 0 ve 1' lerin dağılışı modelde terimlerin nasıl sınıflandığının bir göstergesidir. Örneğin y_{11} gözleminde j=l olduğunda 1. yöntemin yani faktörün 1. düzeyinin etkisini y_{23}, 3. yöntemin etkisini göstermektedir. μ etki olmaması durumunda tüm denklemlerde olacaktır. 1. sütunun toplamı diğer sütunların toplamını vereceğinden X'in rankının. tam olmamasına neden olur. Dolayısıyla X'X de tam ranklı olmaz[4] Buradan klasik matematikte bilindiği gibi (X'X) in tersi alınamaz. Karşımıza çözülmesi gereken iki durum çıkmaktadır:

[4] Merih İpek, "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olamayan Modellere Uygulama". a.g.e.S.56

1) $(X'X)\hat{\beta} = X'Y$ nin $\hat{\beta}$ yoktur.

2-) p vardır fakat sonsuz sayıdadır. Her iki durum için denklemlerin tutarlı olması gerektiği yani diğer bir değişle X'X matrisinin satırları arasındaki lineer bağlantının X'Y vektörünün elemanları arasında da bulunması gerekir. Şimdi çalışmamızın normal denklemlerinin tutarlılık testini yapalım.

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sondaki (4,4) boyutlu simetrik X'X matrisinde 1. sütun (ve 1. satır) diğer üç sütunun (ve satırın) toplamına eşit olup 1. satırdaki 12 sayısı toplam gözlem sayılarını gösterdiğini 12=3+4+5 şeklinde çıkarabiliriz.

12 sayısı için n.. gözlem sayı sembolü ile
3 sayısı için n.. " " " "

4 sayısı için $n._2$ " " " "

5 sayısı için $n._3$ " " " "

gösterirsek

$$X'X=\begin{bmatrix} n_{..} & n_{.1} & n_{.2} & n_{.3} \\ n_{.1} & n_{.1} & 0 & 0 \\ n_{.2} & 0 & n_{.2} & 0 \\ n_{.3} & 0 & 0 & n_{.3} \end{bmatrix}$$

ve toplam gözlem sayısı bu sembollerle gösterirsek $n_{..}= n_{.1} + n_{.2} + n_{.3}$ biçiminde olur. Yani 1. satır diğer üç satırın toplamına eşit olup rank sayısı lineer bağımlı Satır(veya sütun) sayısı kadar azalır ve X'X tam rankh değildir sonucunu

çıkarabiliriz.

$$X'Y=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50\\60\\45\\75\\50\\40\\80\\90\\60\\40\\70\\80 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 740\\155\\245\\340 \end{bmatrix}$$

olup eşitliğin sağındaki sonuç matrisinde 1. elemanın 740 değeri, diğer üç satırın toplamına eşit olduğu yani 740=155+245+340 görülmektedir. Tüm gözlem değerlerinin toplamı için $\Sigma\Sigma y_{ij}=y_{..}$ ile gösterildiğini düşünürsek y.. =y.] +y. 2 +y.3 benzer şekilde gözlem vektörü için de aynı notasyonu kullanabiliriz. Burada X'X'deki lineer bağımsız satır veya sütun sayısı X'Y sonuç matrisinde vardır ve denklemler tutarlıdır. Dolayısıyla sistemin çözümünü genelleştirilmiş ters matrisle yapmaya çalışacağız.

3.2. G- TERS'Ie çözüm:

G- Ters'in hesaplanmasında bir çok araştırmacı değişik yöntemler kullanmışlardır. Fakat çözümün tekliği için hangi G-ters bulunursa bulunsun bunun değişmezliği sozkonusu olduğundan biz aşağıdaki yöntemi kullanacağız.[5]

Örneğin elimizde A simetrik matrisinin olduğunu varsayalım.

a) Rankı r ve r. Mertebeden tekil olmayan bir minör bulunur. Bunu da M ile gösterelim.

b) M in tersi alınarak M^{-1} bulunur.

c) M^{-1} in transpozesi yani $(M^{-1})'$ bulunarak A matrisi içinde, M yi oluşturan her elemanın bulunduğu yere, $(M^{-1})'$ de karşılık gelen elemana yer verilerek diğer elemanların değerleri sıfır olarak yerleştirilir.[6]
d) Bulduğumuz son matris A nm genelleştirilmiş ters matrisi G dır.

Buna göre;

[5]Scarle R.A., "Lincar Models", a.g.e., S.233
6 Merih İpek, "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olamayan Modellere Uygulama", a.g.e.S.26

a) $$X'X = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Yukarıdaki matrisin determinantı sıfırdır. Bundan dolayı rank 4 olamaz. rank=3 tür. Matrisin 3. dereceden bir minörü

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} 20/60 & 0 & 0 \\ 0 & 15/60 & 0 \\ 0 & 0 & 12/60 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$(M^{-1})' = M^{-1}$ olduğu

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$X'XGX'Y = X'Y$ ise normal denklemlerin tutarlı oiduğunu söyleyebiliriz. Yukarıdaki G tersi kullanırsak;

$$X'XGX'Y=\begin{bmatrix}12&3&4&5\\3&3&0&0\\4&0&4&0\\5&0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1/3&0&0\\0&0&1/4&0\\0&0&0&1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}740\\155\\245\\340\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}740\\155\\245\\340\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}740\\155\\245\\340\end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Normal denklemlerin G-Ters'in hesabından dolayı sonsuz(sayı sız) çözümlerinden bazılarını hesaplamaya çalışalım.

β_0 çözüm vektörümüz ,

$\beta_0 = GX'Y + (H-I)Z$

şeklindedir. Burada $H = GX'X$ ve Z herhangi bir çözüm vektörüdür.

$$H=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1/3&0&0\\0&0&1/4&0\\0&0&0&1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12&3&4&5\\3&3&0&0\\4&0&4&0\\5&0&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$Z' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)]$ gibi bir çözüm vektörü alalım. Buna göre,

$\beta_{01} = GX'Y + (H - I)Z$ olup $(H - 1)Z = 0$ olacaktır ve

$$\beta_{01}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}740\\155\\245\\340\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 155/3\\ 245/4\\ 340/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\51,66\\61,25\\68\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu çözümde $155 = y_{.1}$, $245 = y_{.2}$, $340 = y_{.3}$ ve $n_{.1}=3$, $n_{.2}=4$, $n_{3}=5$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$\frac{y_{.1}}{n_{.1}}=\frac{155}{3}=\bar{y}_{.1},\quad \frac{y_{.2}}{n_{.2}}=\frac{245}{4}=\bar{y}_{.2}\quad \text{ve}\quad \frac{y_{.3}}{n_{.3}}=\frac{340}{5}=\bar{y}_{.3}$$

tür. Bu da $\beta_{01} = GX'Y$ çözüm vektörünün modelimizdeki 2., 3. ve 4, öğeleri olup üç eğitim faktörüne ilişkin düzeylerdeki gözlemlerin ortalamasına eşit olduğu görülür. Yani;

$$GX'Y=\begin{bmatrix}0\\ \bar{y}_{.1}\\ \bar{y}_{.2}\\ \bar{y}_{.3}\end{bmatrix}$$

Başka bir keyfi çözüm vektörü alarak çözümün değişmezliğini gösterelim. İkinci keyfi çözüm vektörümüz:

$Z'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ olsun. $\beta_{02} = GX'Y + (H - I)Z$ olup

$$\beta_{02}=\begin{bmatrix}0\\ 155/3\\ 245/4\\ 340/5\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\ 155/3\\ 245/4\\ 340/5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 155/3\\ 245/4\\ 340/5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 158/3\\ 249/4\\ 345/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 52,6\\ 62,25\\ 69\end{bmatrix}$$

β_{01} =Gx'Y + (H – 1)Z ve

$$\beta_0=\begin{bmatrix}0\\ 155/3\\ 245/4\\ 340/5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-z_1\\ z_1+155/3\\ z_1+245/4\\ z_1+340/5\end{bmatrix}$$

Bu çözümlerden önemli bazı sonuçlara işaret edelim. B_{01} ve B_{02} çözümlerinden hangisini alırsak alalım çözümün değişmezliğini gösterelim. Varyans veya regresyon analizinde *"Karelerin ayrışımı"* diye ifade edilen temel özdeşlik[7]

$$KT_g=KT_k+KT_m \qquad (9)$$

olup bunun gözlem değerleri türünden karelerini yazalım:

[7] Merih İpek. "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olamayan Modellere Uygulama", a.g.e.S.71-73

$$\sum\sum(y_{ij}-\bar{y})^2=\sum\sum(y_{ij}-\hat{y}_{ij})^2+\sum\sum(\hat{y}_{ij}-\bar{y})^2$$

dir. Burada,

KT_g : Toplam değişimi,

KT_m : Model'den dolayı oluşan değişimi,

KT_k : Açıklanamaz yani kalıntıdan doğan değişimi göstermekteyiz. Modelimize dönersek (9) özdeşliğİndeki KT_k yı bir takım matematiksel işlemlerle

$$KT_k=Y'Y-\beta'_0X'Y$$

Şeklinde yazabiliriz.

Buna göre ;

$$\beta'_{01}X'Y=\begin{bmatrix}0 & 155/3 & 245/4 & 340/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}740\\155\\245\\340\end{bmatrix}=46144,58$$

$$\beta'_{02}X'Y=\begin{bmatrix}-1 & 158/3 & 249/4 & 345/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}740\\155\\245\\340\end{bmatrix}=46144,58$$

olduğu görürüz. İki ayrı çözüm vektörü olmasına rağmen $\beta'_0X'Y$ nin değişmez olduğu ortaya çıktı. Şimdi kareler ayrışımındaki KT_k parametresini hesaplayalım.

$$KT_k = Y'Y - \beta'_0 X'Y$$

$$\text{İçin } Y'Y = [50\ 60\ 45\ 75\ 50\ 40\ 80\ 90\ 60\ 40\ 70\ 80]\begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 45 \\ 75 \\ 50 \\ 40 \\ 80 \\ 90 \\ 60 \\ 40 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix} = 48850$$

$$KT_k = Y'Y - \beta'_0 X'Y \quad \text{olduğundan}$$

$$KT_k = 48850 - 46144.58 = 2705,42$$

dir.

$$KT_g = KT_k + KT_m \text{ olduğundan}$$

$$KT_g = Y'Y - n\bar{y}^2 = 48850 - 12\left(\frac{740}{12}\right)^2 = 3216,67$$

$$KT_m = \beta'_0 X'Y - n\bar{y}^2 = 46144,58 - 45633,33 = 511,25$$

ve $KT_g = 2705,42 + 511,25 = 3216,67$

olur. Bu da özdeşliğin doğru olduğunu gösterir. Son olarak σ^2 nin tahmincisini hesaplayalım.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{KT_k}{n - r(x)} = \frac{KT_k}{n - r} = \frac{2705,42}{12 - 3} = \frac{2705,42}{9} = 300,6$$

Anlamlılık testlerini ve Variyans Analizi(karelerin çözümlenmesi) işlemlerini tablo ile gösterelim:

V.A. Tablosu

Variyans Analizi: Karelerin Çözümlenmesi				
Değişim kaynağı	Serbestlik derecesi	Karelerin Toplamı	Karelerin Ortalaması	F Testi
Modelden Dolayı	r-1=3-1=2	KT_m=511,25	$\frac{KTm}{r-1}=\frac{511.25}{2}=255,625$	$F=\frac{KT_m/_{r-1}}{KT_k/_{n-r}}=\frac{255.625}{300.6}=0,85$
Kalıntı	n − r = 12 -3=9	KT_k=2705,42	$\frac{KT_k}{n-r}=\frac{2705.42}{9}=300,6$	
Toplam	11	KT_g=3216,67		

α = 0,05 anlamlılık düzeyinde F-Test istatistiğini inceleyelim:

$F_{2,9:0.05}$=**4,26 ve hesaplanan tablo değeri de F = 0,85 olduğundan eğitim yöntemleri arasında anlamlı bir ayrım olmadığını başka bir deyişle modelin Y bağıntısındaki değişimi açıklamadığına karar verilir.**

<u>Sonuç:</u> Hangi $\hat{\beta}_0$ çözümü kullanılırsa kullanılsın, çözümleme için gerekli önemli bazı değerlerin değişmediği görüldü.Çalışmamızda;

β_{01}=[0 51,66 61,25 68]

ve

β_{02}=[-1 52,6 62,25 69]

çözüm vektörlerinin değerleri birbirlerinden çok az farkettiği görülmektedir. Eğitim faktörünün I. düzeyinin ortalama notları 51,66 ile 52,6 olarak bulunmuştur.

II.düzeyin notları 68 ile 69 dur. Hangi çözüm olursa olsun sıralamanın değişmediği ve eğitim faktörünün III.düzeyi olan ***"Mesleki derslerdeki konulara göre uygun örnekler seçilerek konu anlatımıyla"*** ilgili yöntem en yüksek ortalamayı vermiştir. Fakat bunun diğerleriyle arasında büyük farklar bulunmamaktadır. Diğer iki eğitim düzeyi de başarısız görülmemektedir.

X matrisinin gösterdiği özel yapı nedeniyle rankı tam olmayan modelleri bir tür regresyon modellerinin bir özel biçimi şeklinde göstermiş olduk..

Nitel değişkenli normal denklemlerin oluşturduğu sistem tam ranklı bir model olmadığından tersi alınamamaktadır. Hiçbir kısıtlamaya gidilmeden G=(X'X)-1 den

$\beta_o = \hat{\beta}_0$ tahmini yapılmakta ve sanki tam ranklı modellerin çözümü gibi bir işlem yapılmaktadır.

<u>KAYNAKÇA</u>

[1] **Mazmanoğlu, A.,** "Etkileşimsiz Çapraz 2 - Faktörlü Variyans Analizi Modellerinde Matrislerle Çözümleme", Doktora Tezi, İST. Ü., Sosyal Bilimler Enst., 1984, İST.

[2] **İpek, M.** "Genelleştirilmiş Ters Matrisler ve Rankı Tam Olmayan Modellere Uygulama", İST., İkt. Fak., Doçentlik Tezi, 1980, İST.

[3] **Searle, S.R.,** "Linear Models", John Wiley&Sons. NewYork, 1970

[4] **Penrose, R.A.,** "A Generalized Inverse for Matrices", proc. Cambridge Philos.Soc, 1955

[5] **Graybill, F.A**., "Tlıeory and Application of The Linear Model", 1976

[6] **Rao, C.R.,** "LinearStatistical Inference and its applications", 2nd Ed, 1973

[7] **Kempthorne O**., "The Design and Analysis of Experiments", 1975

[8] **Searle S.R.-Haussman W.H**., "Matrix Algebra for Business and Economics", 1970