KORTEVEQ-DE FRİZ TƏNLİYİNİN İNVARİANTLIQ OPERATORLARININ OPTİMAL SİSTEMİ VƏ İNVARİANT HƏLLƏRİ

Ə.Q. AĞAMALIYEV, A.Ş. AŞUROVA
Bakı Dövlət Universiteti
Bakı / AZƏRBAYCAN
phusics@mail.ru

XÜLASƏ

Məqalədə Korteveq-de Friz tənliyinin invariantlıq operatorlarının aşkar şəklindən istifadə edərək Killinqin invariant kvadratik formasının aşkar şəkli tapılmışdır. Bundan istifadə edərək invariantlıq operatorlarının optimal sistemi təyin edilmişdir. Bundan sonra isə Korteveq-de Friz tənliyinin invariant həllərindən bir neçəsi tapılmışdır.

Açar sözlər: invariantlıq operatorları, dalğa tənliyi, Killinqin invariant kvadrat

OPTIMAL SISTEMS OF ONEDEQRE OPERATORS AND INVARIANCE SOLUTIONS OF EQUATION KORTEWEG-DE VRIES

SUMMARY

In this paper, using the invariant operators of the wave equation. The commutation operators are calculated. On the basis of the received expressions *adx* operator is calculated and then Killinq square-law form is obtained. Using this square-law form the optimal system of invariant operators and invariance solutions equation Korteweq-de Vries.

Key words: invariant operator, wave equation, Killinq square-law

Korteveq –de Friz tənliyinin invariantlıq operatorlarının aşkar şəkli [1] işində verilmişdir. İndiki işdə məqsəd həmin operatorların aşkar şəklindən istifadə edərək həmin operatorların optimal sistemini tapmaqdan və onlardan istifadə edərək tənliyin bəzi invariant həllərinin tapılmasından ibarətdir. Məsələni həll etmək üçün aşağıdakı əməliyyatlar aparılmışdır.

Operatorların kommutasiyalarının ifadəsi alınmışdır və məqalədə cədvəl şəklində verilmişdir:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	X_2	$3X_1$
X_2	0	0	0	X_2
X_3	$-X_2$	0	0	$-2X_3$
X_4	$-3X_1$	$-X_2$	$2X_3$	0

Kommutasiya şərtlərindən istifadə edərək daxili avtomorfizmin ifadəsinin matrisası tapılmışdır. Bunun üçün birinci növbədə

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x_i', X_i\right) = \left[x_i' X_i, X_k\right]$$

-tənliklər sistemi

$$x_i(t) = x_i(0), \qquad (i = 1,2,3,4)$$

şərti daxilində həll olunmuşdur.

Nümunə üçün A_1 operatorunun tapılması məqalədə verilmişdir və aşkar şəkli belədir:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3t_1 \\ 0 & 1 & -t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uyğun əməliyyatlar vasitəsilə A_2, A_3, A_4 operatorları tapılmışdır.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} e^{3t_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bunlardan istifadə edərək daxili avtomorfizm operatorunun aşkar şəkli yazılmışdır:

$$A_1A_2A_3A_4X = \begin{pmatrix} e^{3t_4}x_1 - 3t_1x_4 \\ t_3e^{3t_4}x_1 + e^{t_4}x_2 - t_2x_4 - t_1e^{-2t_4}x_3 - 2t_1t_3x_4 \\ e^{-2t_4}x_3 + 2t_3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Bundan istifadə edərək Killinqin invariant kvadratik forması *K(x, x)=Sp(adx, adx)* düsturu vasitəsilə hesablanmışdır. Kvadratik formanın aşkar şəkli belədir:

$$K(x,x) = e^{6t_4} + e^{2t_4} + e^{-4t_4} + 1$$

Kvadratik formanın aşkar şəklindən istifadə edərək I tərtibdən optimal operatorlar sistemi tapılmışdır:

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_1 + X_3,\ X_1 - X_3$$

Optimal operatorlar sisteminin aşkar şəklini bildikdən sonra tənliyin bəzi invariant həlləri tapılmışdır. Bunları tapmaq üçün ayrı-ayrı operatorların invariantlarının aşkar şəklindən istifadə olunmuşdur.

Məsələn $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ operatoruna uyğun olan bir parametrli alt qrup üçün invariantları $J_1 = u$, $J_2 = x$ şəklində seçə bilərik. Çünki bu dəyişənlərlə X_1 operatoruna təsir etdikdə sıfır alınır. Bu da invariantın tərifinə uyğun gəlir. Əgər invariantları bu şəkildə seçsək, onda Korteveq-de Friz tənliyi $u = \varphi(x)$ funksiyasına nəzərən

$$\varphi''' + \varphi\varphi' = 0$$

tənliyinə gətirilir. Çünki bildiyimiz kimi, Korteveq-de Friz tənliyi $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ şəklindədir. $u = \varphi(x)$ bərabərliyini və φ-nin yalnız x - dan asılılığını Korteveq-de Friz tənliyində nəzərə aldıqda $\varphi''' + \varphi\varphi' = 0$ tənliyi alınır. Bu tənliyi inteqrallamaq asanlaşır. $\varphi''' + \varphi\varphi' = 0$ tənliyini inteqrallasaq alırıq ki:

$$\varphi'' + \frac{1}{2}\varphi^2 = c$$

Birinci inteqralı aldıqdan sonra alınan tənliyi $2\varphi'$ - ə vursaq:

$$2\varphi'\varphi'' + \varphi^2\varphi' = c \cdot 2\varphi'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi'^{\,2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\varphi^3\right) = \frac{d}{dt}\left(c^2\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi'^{\,2} + \frac{1}{3}\varphi^3 - c^2\varphi\right) = 0$$

Bu tənliyi yenidən inteqrallasaq və φ - nin $|x| \to \infty$ -da və $\varphi', \varphi'' \to 0$ - da $\varphi = -c$ sabit olduğunu qəbul etsək, birinci tərtibdən differensial tənliyi alarıq:

$$\varphi'^2 + \frac{1}{3}\varphi^3 - c^2\varphi = 0$$

Bu tənliyin həlli $\varphi'(0) = 0$ olanda

$$\varphi(x) = c(3\sec h^2 \frac{\sqrt{c}}{2}x - 1)$$

$X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ operatoru üçün invariantlar $J_1 = u$, $J_2 = t$ şəklindədir. Onda Korteveq-de Friz $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ tənliyində $u = u(t)$ bərabərliyini nəzərə aldıqda $u_t = 0$ alınır. Buradan da alınır ki, $u = const$.

ƏDƏBİYYAT

1. Ağamalıyev Ə.Q. Korteveq-de Friz tənliyinin maksimal invariantlıq qrupunun tapılması // BDU-nun xəbərləri, fizika-riyaziyyat seriyası, 2002, №1, s. 23-25
2. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. Москва: Наука, 1983, 280 с.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальным уравнений. Москва: Наука, 1978, 399 с.
4. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1989, 635 с.